

Arbitraggi e prezzi Arrow-Debreu

Gaia Barone*

Università LUISS "Guido Carli"

L'obiettivo di questo lavoro è quello di verificare l'assenza di opportunità di arbitraggio nel mercato delle opzioni scritte sullo S&P500 e di estrarre dalle loro quotazioni la distribuzione probabilistica coerente con il modello di Merton. La struttura del lavoro è la seguente: nel Paragrafo 2 vengono esaminate le relazioni tra arbitraggi e prezzi Arrow-Debreu; nel Paragrafo 3 vengono presi in considerazione due modelli che sembrano essere coerenti con le quotazioni delle opzioni: il modello CEV e il modello di Merton; seguono poi la stima del modello Merton-Geske (Paragrafo 4), basata sui prezzi delle opzioni, e le conclusioni. [Codice JEL: G13]

Parole chiave: state-prices density, opzioni su indici azionari, modello Merton-Geske

1. - Introduzione

Una delle idee centrali del pensiero economico è che i prezzi racchiudano informazioni utili per le decisioni economiche. Secondo Friedrich von Hayek (1945), il ruolo del sistema dei prezzi è proprio quello di aggregare in modo efficiente i singoli elementi di un'informazione che è ampiamente dispersa, riassumendoli in un'unica statistica – il prezzo. Il prezzo rappresenta per gli operatori economici tutto quel che devono sapere (in aggiunta al-

* <gaiabarone@gmail.com>. Questo saggio è tratto dalla mia omonima tesi magistrale in Economia e Finanza (Relatore: Prof. Gennaro Olivieri).

Sono particolarmente grata a due anonimi *referee* per aver letto una precedente versione di questo lavoro e per i loro commenti. Sono anche grata a mio padre per aver scritto il *software* che ho utilizzato nel *test* empirico. Ogni errore rimasto è esclusivamente mio.

le informazioni specifiche che li riguardano) per poter decidere in modo corretto.

I prezzi più elementari sono quelli Arrow-Debreu, ossia i prezzi degli *state-securities* (chiamati anche *state-contingent claims*, *pure securities* o Arrow-Debreu *securities*), titoli che pagano un'unità di numerario, in una certa data, se e solo se si verifica un determinato "stato di natura".¹

Nell'economia finanziaria "nucleare" le particelle elementari sono appunto rappresentate dai titoli Arrow-Debreu.² Pur essendo nati in un contesto puramente teorico, questi titoli si prestano ad applicazioni pratiche:³

Dato che i prezzi Arrow-Debreu hanno un enorme contenuto informativo e consentono di semplificare notevolmente la valutazione dei titoli "stato-dipendenti" come le opzioni e gli altri derivati, è un peccato che i titoli Arrow-Debreu non vengano ancora scambiati in borsa.

(traduzione propria)

L'auspicio espresso nella precedente citazione si sta ora avverando con la sempre più diffusa creazione di *prediction markets* (detti anche *information markets* o *event markets*), dove vengono negoziati contratti su eventi specifici. L'archetipo di questi mercati è rappresentato dall'Iowa Electronic Market (IEM) cui Vernon Smith ha dedicato spazio nella sua Nobel *lecture*.⁴

Nell'IEM si negoziano titoli Arrow-Debreu su eventi elettorali e sui *target rates* della Federal Reserve. Ad esempio, nel 2008, i partecipanti potevano effettuare, al prezzo P_O , una scommessa che avrebbe pagato \$1 se Barack Obama fosse stato eletto e \$0 altrimenti, oppure piazzare, al prezzo P_M , una scommessa che avrebbe pagato \$1 se John McCain fosse stato eletto e \$0 altrimenti.⁵

Nel nostro esempio, P_O e P_M possono essere chiamati "prezzi

¹ Si veda ARROW K.J. (1953).

² Si veda SHARPE W. (1995).

³ Si veda AIT-SAHALIA Y. - LO A.W. (1998).

⁴ Si veda SMITH V. (2002, pp. 518-519).

⁵ Si veda RUBINSTEIN M. (2006, p. 27).

Arrow-Debreu (A-D)” (*state-prices*), ossia prezzi di titoli A-D, anche se ciò non è strettamente corretto. I titoli Arrow-Debreu pagano \$1 in un solo stato di natura e \$0 altrimenti, mentre l’IEM non negozia titoli che pagano solo se Obama vince, il *target rate* della FED è pari all’1%, lo S&P500 è pari a 1,500, ecc.

In genere, i titoli Arrow-Debreu non vengono negoziati in modo autonomo ma sono “incorporati” (*embedded*) nei titoli ordinari – in forme più o meno inscindibili. I prezzi Arrow-Debreu vengono quindi determinati dagli operatori in modo implicito, per formare i prezzi dei titoli trattati nei mercati finanziari.

Uno dei campi più interessanti dell’economia finanziaria è proprio quello relativo alle tecniche utilizzate per estrarre informazioni dalle quotazioni di titoli e derivati. È come se il mercato fosse uno strumento di sintesi che interroga continuamente milioni di persone sulle loro probabilità soggettive e sui loro atteggiamenti verso il rischio, per poi compendiare i risultati del sondaggio sotto forma di prezzi di mercato. Risolvendo il cosiddetto “problema inverso” (*inverse problem*) è possibile estrarre dai prezzi di mercato le stime di queste probabilità e di questi atteggiamenti.⁶

È questo il nostro obiettivo: estrarre i prezzi Arrow-Debreu dalle quotazioni delle opzioni sullo S&P500 negoziate alla Chicago Board Options Exchange.

La struttura dell’articolo è la seguente: nel paragrafo 2 vengono esaminate le relazioni tra arbitraggi e prezzi Arrow-Debreu. Questo è un punto importante perché, secondo il primo teorema fondamentale dell’economia finanziaria, i prezzi Arrow-Debreu esistono se e solo se non ci sono opportunità di arbitraggio.⁷ Pertanto, prima di stimare i prezzi Arrow-Debreu, è necessario verificare che non esistano opportunità di arbitraggio. Nel paragrafo 3 vengono presi in considerazione due modelli che sembrano coerenti con i prezzi che si osservano nei mercati delle opzioni: il modello CEV e il modello di Merton. Seguono poi la stima del modello Merton-Geske (paragrafo 4) e le conclusioni.

⁶ Si veda RUBINSTEIN M. (2005, pp. 13-19).

⁷ Si vedano RUBINSTEIN M. (2005, p. 17) e Ross S.A. (2005, Capitolo 2).

2. - Arbitraggi

2.1 Definizione ed esempi

La definizione di arbitraggio fornita da Philip H. Dybvig e Stephen A. Ross è la seguente:⁸

arbitraggio. *Un'opportunità di arbitraggio è una strategia di investimento che garantisce un flusso finanziario positivo in qualche circostanza, senza generare flussi finanziari negativi, né richiedere investimenti netti. Per definizione, quindi, è possibile effettuare una strategia di arbitraggio per importi comunque grandi, senza limite al fattore di scala; in altri termini, un'opportunità di arbitraggio rappresenta un sistema che produce denaro indefinitamente, una cosiddetta money pump. Un esempio semplice di arbitraggio è dato dall'opportunità di prendere in prestito e prestare denaro, senza costi di transazione, a due differenti tassi di interesse prefissati. Comunque, il disallineamento tra i due tassi non potrà persistere: saranno gli arbitraggisti che porteranno i tassi ad essere uguali tra loro.*

(traduzione propria)

Dato che rappresentano una preziosa fonte di reddito per chi le individua, è difficile trovare traccia delle operazioni di arbitraggio effettivamente sfruttate. Poiché a volte queste opportunità tendono a ripetersi, gli arbitraggisti evitano di dare informazioni. Una rara eccezione è rappresentata da un *clinical paper* di Myron

⁸ Si veda DYBVG P.H. - ROSS S.A. (1996). La traduzione in italiano è quella di Massimo De Felice in DE FELICE M. - MORICONI F. (1996, p. 3).

Il primo ad aver utilizzato il termine *arbitrage* in un significato simile a quello odierno sembra essere stato MATHIEU DE LA PORTE nel suo trattato "*La Science des Négocians et Teneurs de Livres*" (1704). Si veda *Le Trésor de la Langue Française Informatisé, atilf.atilf.fr/*, voce "*arbitrage*". In questa voce, vengono identificate tre principali tipologie di arbitraggi: l'"arbitraggio su valute" (*arbitrage sur monnaies*), possibile in caso di disallineamenti dei tassi di cambio bilaterali, l'"arbitraggio pronti-contro-termini" (*arbitrage comptant contre terme*), teso a sfruttare le violazioni della *forward-spot parity*, e l'"arbitraggio mediante riporti" (*arbitrage en reports*), anche questo volto a sfruttare eventuali violazioni della *forward-spot parity*.

S. Scholes e Mark A. Wolfson, dove gli autori così sintetizzano un'opportunità di arbitraggio effettivamente sfruttata:⁹

Molte società danno agli azionisti il diritto di acquistare a sconto altre azioni. Tipicamente, lo sconto è del 5,263% (ossia 5/95) rispetto ai prezzi di mercato. Per poter comprare azioni a sconto, occorre avere almeno un'azione della società ed iscriversi al "programma degli acquisti di azioni a sconto". Il passo successivo è quello di inviare periodicamente un assegno per posta. La società allora emette le azioni, senza chiedere commissioni. Le azioni possono essere poi rivendute sul mercato nel giro di qualche settimana. Con un investimento di \$200.000 abbiamo realizzato un profitto di \$421.000 (che per \$163.800 è dovuto allo sconto concesso dalle società, per \$182.600 al rialzo dei corsi azionari e per \$74.600 ad altri fattori). Il profitto è al netto delle commissioni di intermediazione, dei costi delle coperture e degli altri costi di negoziazione. Il novanta per cento delle nostre operazioni ha riguardato un arco di tempo minore di due anni.

Ad esempio, ogni mese gli azionisti di J.P. Morgan potevano comprare azioni di J.P. Morgan fino a un massimo di \$5.000 con uno sconto del 5,263%. Potendo vendere immediatamente le azioni senza costi, ogni transazione avrebbe consentito un profitto sicuro di \$263,16. Avremmo preferito ricevere da J.P. Morgan un assegno di \$263,16 al mese, evitando così di dover spedire per posta il nostro assegno, comprare le azioni e poi rivenderle. In effetti, se avessimo potuto così evitare i costi di transazione relativi a queste operazioni, ci saremmo anche accontentati di qualcosa in meno. Il tasso di rendimento annuo di un investimento che frutta ogni mese il 5,263% supera l'85%.

(traduzione propria)

⁹ Si veda SCHOLES M.S. - WOLFSON M.A. (1989).

Un esempio di arbitraggio viene anche dato da Stephen A. Ross:¹⁰

Sono stato una volta coinvolto in un gruppo specializzato in arbitraggi su "titoli garantiti da ipoteche". Si trattava di comprare e vendere "oscuri e arcani" pezzi di carta rappresentativi di tranches di pass-through mortgages. Le tranches erano state ottenute attraverso operazioni di stripping. Ricordo che avevamo scoperto, dopo estese analisi, che una di queste tranches – un tipo particolare di "IO" (Interest Only) – offriva un tasso di rendimento sicuro pari al 37 per cento annuo. Questa era la buona notizia. La cattiva notizia era che l'investimento non era scalabile. Potevamo comprare solo \$600.000 di questa tranche. Dato l'elevato costo delle risorse umane impiegate, il profitto copriva a mala pena il costo dell'analisi. Il mercato aveva trovato un equilibrio anche per questi ottimi affari: i costi delle analisi per individuarli, inclusi i compensi del capitale umano impiegato, erano pressoché pari ai ricavi d'arbitraggio.

(traduzione propria)

2.2 Un esempio numerico

Estenderemo ora un esempio utilizzato da Mark Rubinstein per illustrare numericamente i diversi concetti che si intrecciano con la trattazione degli arbitraggi: valore attuale, probabilità soggettive e probabilità neutrali verso il rischio, funzioni di utilità e coefficienti di avversione al rischio, prezzi Arrow-Debreu (o *state prices*), *stochastic discount factors* (o *pricing kernel*), *volatility bounds*.

L'esempio riguarda la valutazione di una polizza assicurativa contro il rischio di terremoti.¹¹ La polizza è ad 1 anno e il premio viene pagato anticipatamente.

¹⁰ Si veda Ross S.A. (2005, p. 3, nota 2).

¹¹ Si veda RUBINSTEIN M. (2005, pp. 2-13). La nostra prima estensione rispetto alla dimostrazione originale di Mark Rubinstein consiste nell'aver ricavato i pas-

La procedura di valutazione è formata dai seguenti passi:

1. si dichiarano le probabilità soggettive assegnate ai diversi stati di natura (misurati dall'intensità dei terremoti);
2. si sceglie la propria funzione di utilità (in genere una funzione appartenente alla famiglia delle funzioni potenza) e si dichiara il proprio grado di avversione al rischio;
3. si determinano i fattori di aggiustamento per il rischio con cui rettificare le probabilità soggettive;
4. si ottengono le probabilità neutrali verso il rischio come prodotto tra probabilità soggettive e fattori di aggiustamento;
5. si calcolano i prezzi Arrow-Debreu come prodotto tra probabilità neutrali verso il rischio e fattore di attualizzazione;
6. si ottiene il valore della polizza come somma ponderata dei prezzi Arrow-Debreu, con pesi pari ai pagamenti previsti per ogni classe di intensità del terremoto.

L'esempio consente inoltre di verificare:

1. l'equivalenza dell'approccio basato sul *pricing kernel* [il *pricing kernel*, sinonimo dei «fattori di attualizzazione stocastici» (*stochastic discount factors*), è definito dal rapporto tra prezzi Arrow-Debreu e probabilità soggettive];
2. il rispetto di un limite inferiore per la volatilità del *kernel*.

Va sottolineato che il calcolo dei fattori di aggiustamento, degli *state prices*, ecc., sulla base della funzione di utilità di chi ha acquistato la polizza, è corretto solo se il possessore della polizza è l'«investitore rappresentativo», ossia l'ipotetico agente che detiene il portafoglio di mercato costituito da tutte le attività in circolazione.¹²

Payoffs e probabilità soggettive

La tavola 1 mostra cinque «stati di natura», mutuamente esclusivi ed esaustivi, misurati sulla scala di Richter. Ognuno di questi stati offre una piena descrizione degli aspetti rilevanti del mondo.

saggi necessari per ottenere i fattori di aggiustamento per il rischio in base alla funzione di utilità del soggetto che acquista la polizza. Le altre due estensioni riguardano il *pricing kernel* e il *volatility bound*.

¹² Si veda DYBVIG P.H. - ROSS S.A. (2003, p. 620).

TAV. 1

POLIZZA-TERREMOTI: *PAYOFF* E PROBABILITÀ SOGGETTIVE

<i>Scala di Richter</i>	<i>Danno</i>	<i>Payoff</i> (\$)	<i>Probabilità Soggettiva</i>
0 – 4,9	Nessuno	0	0,850
5,0 – 5,4	Lieve	750	0,100
5,5 – 5,9	Piccolo	10.000	0,030
6,0 – 6,9	Medio	25.000	0,015
7,0 – 8,9	Grande	50.000	0,005

I *payoff* della polizza, ossia gli importi in denaro, z , previsti per risarcire i danni subiti a causa del terremoto, crescono in funzione dell'intensità del terremoto.

Gli investitori assegnano ad ogni stato di natura una probabilità soggettiva, π , che esprime la loro personale opinione circa il fatto che lo stato effettivamente si verificherà. Naturalmente, affinché siano probabilità, le π devono sommare ad uno ed essere tutte rappresentate da numeri reali non-negativi.

Si potrebbe pensare che il valore corrente, V , della polizza assicurativa debba essere pari al *payoff* atteso attualizzato in base al tasso d'interesse privo di rischio, r , ad 1 anno:

$$V = \frac{E(z)}{1+r} = \frac{\sum \pi z}{1+r}$$

dove E è l'operatore "valore atteso".

Se $r = 0,05$, il valore corrente della polizza sarebbe pari a

$$V = \frac{\$0 + \$75 + \$300 + \$375 + \$250}{1,05} = \frac{\$1.000}{1,05} = \$952,38.$$

Quest'approccio trascura però l'avversione al rischio.

Funzione di utilità

Per tener conto dell'avversione al rischio, si devono calcolare

i fattori di aggiustamento con cui rettificare le probabilità soggettive.

La procedura è la seguente:

1. si calcolano le utilità marginali della ricchezza, U_W , relative ai singoli stati;

2. si determinano i fattori di aggiustamento, f , moltiplicando le utilità marginali per una costante arbitraria c ($f \equiv cU_W$) tale per cui la somma delle probabilità, π^* , definite da

$$(1) \quad \pi^* = \pi f$$

sia pari a uno.

Dopo questa calibratura, le π^* possono essere considerate come probabilità in quanto sono tutte non-negative (essendo le utilità marginali positive) e sommano a uno (grazie alla costante arbitraria).

Per applicare questa procedura, supponiamo che la ricchezza di chi acquista la polizza sia pari a \$100.000 nel primo stato di natura, quello "ricco" in cui non subisce alcun danno a causa di terremoti (tavola 2). Negli altri stati di natura, la sua ricchezza diminuisce in misura pari all'entità del danno subito (che si suppone pari al *payoff* della polizza).

TAV. 2

FATTORI DI AGGIUSTAMENTO E PROBABILITÀ NEUTRALI VERSO IL RISCHIO

Scala di Richter	Payoff (z)	Probabilità Soggettiva (π)	Ricchezza (W)	Utilità Marginale ($U_W = W^{\gamma-1}$)	Fattore di Aggiustamento verso il Rischio ($f = c U_W$)	Probabilità Neutrali ($\pi^* = f \pi$)
0 - 4,9	0	0,850	100.000	0,00316	0,9936	0,845
5,0 - 5,4	750	0,100	99.250	0,00317	0,9974	0,100
5,5 - 5,9	10.000	0,030	90.000	0,00333	1,0474	0,031
6,0 - 6,9	25.000	0,015	75.000	0,00365	1,1474	0,017
7,0 - 8,9	50.000	0,005	50.000	0,00447	1,4052	0,007

Nota: si è ipotizzato che l'elasticità, γ , della funzione di utilità sia pari a 0,5. La costante arbitraria, c , necessaria per definire i fattori di aggiustamento, f , è risultata pari a 314,2194.

In corrispondenza di ciascuno stato di natura possiamo calcolare l'utilità marginale della ricchezza, sotto l'ipotesi che la funzione di utilità appartenga alla famiglia delle funzioni potenza:

$$U(W) = \frac{W^\gamma}{\gamma}$$

Supponiamo che l'elasticità, γ , sia pari a 0,5. L'utilità marginale della ricchezza è pari a $W^{\gamma-1} = W^{-0,5}$. Come si vede nella tavola 2, l'utilità marginale di \$1 cresce col ridursi della ricchezza.

I fattori di aggiustamento, f , delle probabilità soggettive, π , vengono ricavati moltiplicando le utilità marginali, U_w , per una costante arbitraria, c . Affinché la somma delle probabilità $\pi^* \equiv f\pi$ sia pari a 1, poniamo:

$$(2) \quad \sum \pi^* = \sum \pi f = \sum \pi c U_w = 1.$$

Risolvendo la (2) rispetto a c si ottiene:

$$c = \left(\sum \pi U_w \right)^{-1}.$$

Il valore effettivo della polizza assicurativa può essere determinato con la seguente formula:

$$(3) \quad V = \frac{E^*(z)}{1+r} = \frac{\sum \pi^* z}{1+r}$$

dove E^* è l'operatore "valore atteso" in un mondo neutrale verso il rischio.

In base alle probabilità π^* , il valore della polizza risulta pari a:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\$0 + \$74,80 + \$314,22 + \$430,26 + \$351,31}{1,05} \\ &= \frac{\$1.170,59}{1,05} = \$1.114,85 \end{aligned}$$

ossia a \$1.114,85. Il valore effettivo della polizza è sensibilmente maggiore di quello ottenuto in precedenza (\$952,38) quando non si era tenuto conto dell'avversione per il rischio.

Gli effetti dell'avversione al rischio sono stati assorbiti dalle probabilità π^* . Pertanto, il *payoff* atteso è stato attualizzato in base al tasso d'interesse privo di rischio (senza fare aggiustamenti per l'avversione al rischio). Questo è il motivo per cui le probabilità π^* sono chiamate "probabilità neutrali verso il rischio". Va sottolineato che sono in genere diverse dalle probabilità soggettive.

Prezzi Arrow-Debreu

I prezzi Arrow-Debreu (o *state-prices*), q , sono pari al prodotto tra le probabilità neutrali verso il rischio, π^* , e il "fattore di attualizzazione" (*discount factor*), $1/(1+r)$:

$$(4) \quad q = \frac{\pi^*}{1+r}$$

Utilizzando gli *state-prices*, la formula (3) per la valutazione della polizza diventa:

$$(5) \quad V = \sum qz$$

In base ai prezzi q , riportati nella tavola 3,

TAV. 3

PREZZI ARROW-DEBREU E PRICING KERNEL

Probabilità Soggettiva (π)	Fattore di Aggiustamento (f)	Probabilità Neutrali verso il Rischio ($\pi^* = f\pi$)	Prezzo Arrow-Debreu [$q = \pi^*/(1+r)$]	Pricing Kernel [$\phi = q/\pi = f/(1+r)$]
0,850	0,9936	0,845	0,80438	0,9463
0,100	0,9974	0,100	0,09499	0,9499
0,030	1,0474	0,031	0,02993	0,9975
0,015	1,1474	0,017	0,01639	1,0927
0,005	1,4052	0,007	0,00669	1,3383

il valore della polizza risulta pari a:

$$V = \$0 + \$71,24 + \$299,26 + \$409,77 + \$334,58 = \$1.114,85$$

Scrivendo la formula in questo modo, è naturale interpretare i prezzi q come prezzi di titoli (Arrow-Debreu *securities*) che pagano \$1 se si verifica un certo stato di natura e \$0 altrimenti.

Si noti, in particolare, che:

$$\sum q = \frac{1}{1+r}$$

e che, nel nostro esempio, risulta:

$$\begin{aligned} \sum q &= 0,80438 + 0,09499 + 0,02993 + 0,01639 + 0,00669 \\ &= 0,95238 = 1/1,05 \end{aligned}$$

Quest'eguaglianza si presta ad una semplice interpretazione economica: il valore di un portafoglio che paga \$1 quale che sia lo stato di natura che si verificherà è pari al valore, $1/(1+r)$, di un titolo privo di rischio che paga \$1 alla scadenza. Pertanto, anche se non sono mai negativi, gli *state-prices* q non sono probabilità perché non sommano a uno (a meno che, naturalmente, non sia $r = 0$).

Pricing Kernel

Quanto si è visto finora per il calcolo del valore attuale può essere così riassunto:

1. l'utilizzo delle probabilità soggettive, π , tiene conto solo delle opinioni;
2. l'utilizzo delle probabilità neutrali verso il rischio, π^* , tiene conto sia delle opinioni sia dell'avversione al rischio;
3. l'utilizzo degli *state-prices*, q , tiene conto simultaneamente delle opinioni, dell'avversione al rischio e del tempo.

Il valore attuale può quindi essere calcolato in vari modi. La formulazione che ora viene più frequentemente usata è quella basata sul "nucleo di valutazione" (*pricing kernel*), ϕ .

Il *pricing kernel*, sinonimo dei "fattori di attualizzazione sto-

castici" (*stochastic discount factors*), è definito dal rapporto tra i prezzi Arrow-Debreu, q , e le probabilità soggettive, π :

$$(6) \quad \varphi = \frac{q}{\pi}$$

In tal caso, sostituendo $q = \varphi\pi$ nella (5), si ottiene il valore attuale della polizza come:

$$V = \sum z\varphi\pi \equiv E(z\varphi)$$

e nel nostro esempio (tavola 3):

$$V = \$0 + \$71,24 + \$299,26 + \$409,77 + \$334,58 = \$1.114,85$$

Inoltre, se nella (6) si sostituiscono π e q in base alla (1) e alla (4), il *pricing kernel*, φ , può anche essere rappresentato come rapporto tra il fattore di aggiustamento, f , e il *riskless return*, $1 + r$:

$$\varphi = \frac{f}{1+r}$$

Volatility Bounds

Sia r_i il tasso di rendimento dell' i -esimo Arrow-Debreu *security* ($i = 1, 2, \dots, 5$) e $E(s_i)$ il premio al rischio o "tasso di rendimento aggiuntivo" (*excess rate of return*) rispetto al tasso privo di rischio. Sia s il vettore degli *excess returns*, $s_i \equiv r_i - r$:

$$s = \begin{bmatrix} s_1 = r_1 - r \\ s_2 = r_2 - r \\ \dots \\ s_5 = r_5 - r \end{bmatrix}$$

Se non esistono opportunità di arbitraggio, il valore corrente di un portafoglio che offre s_i , ossia il tasso di rendimento r_i in cambio di r , deve essere nullo. Pertanto:

$$(7) \quad E(\varphi s) = 0$$

dove φ è il *pricing kernel*.

Se si tiene conto della definizione di covarianza, per cui:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\varphi, s) &= E\{[\varphi - E(\varphi)][s - E(s)]\} \\ &= E[\varphi s - \varphi E(s) - E(\varphi)s + E(\varphi)E(s)] \\ &= E(\varphi s) - E(\varphi)E(s) - E(\varphi)E(s) + E(\varphi)E(s) \\ &= E(\varphi s) - E(\varphi)E(s) \end{aligned}$$

la (7) può anche essere scritta come:

$$(8) \quad E(\varphi)E(s) + \text{cov}(\varphi, s) = 0$$

da cui:

$$E(s) = -\frac{1}{E(\varphi)} \text{cov}(\varphi, s)$$

$$|E(s)| = \frac{1}{E(\varphi)} |\text{cov}(\varphi, s)|.$$

Inoltre, dato che – per definizione – il valore assoluto del coefficiente di correlazione deve essere minore o uguale a 1 e quindi:

$$(9) \quad |\text{cov}(\varphi, s)| \leq \sigma_\varphi \sigma_s$$

si ha:

$$(10) \quad |E(s)| \leq \frac{1}{E(\varphi)} \sigma_\varphi \sigma_s.$$

Infine, esplicitando σ_φ dalla (10), possiamo ricavare il “limite inferiore” (*lower bound*) di Hansen e Jagannathan (1990) per la volatilità del *kernel*:¹³

¹³ Si veda HANSEN L.P. - JAGANNATHAN R. (1991).

$$(11) \quad \sigma_{\varphi} \geq \frac{E(\varphi)|E(s)|}{\sigma_s}.$$

Per verificare che la (11) venga effettivamente rispettata, dobbiamo innanzitutto calcolare la media e la deviazione standard del *pricing kernel* (tavola 4).

TAV. 4

PRICING KERNEL E VOLATILITY BOUND

Payoff (z)	Probabilità Soggettiva (π)	Pricing Kernel (φ)	Valore Atteso del Kernel ($\pi\varphi$)	
0	0,850	0,9463	0,80438	
750	0,100	0,9499	0,09499	
10.000	0,030	0,9975	0,02993	
25.000	0,015	1,0927	0,01639	
50.000	0,005	1,3383	0,00669	
		Media	0,95238	
		Deviazione standard	0,03366	
Rate of Return ($r_i = z/V - 1$)	Excess Rate of Return ($s_i = r_i - r$)	Valore Corrente s_i ($s \times \varphi \times \pi$)	Valore Atteso s_i ($s \times \pi$)	Covarianza tra φ e s [Cov(φ, s)]
-1,0000	-1,0500	-0,84460	-0,89250	0,00461
-0,3273	-0,3773	-0,03584	-0,03773	0,00006
7,9698	7,9198	0,23701	0,23759	0,01093
21,4245	21,3745	0,35035	0,32062	0,04532
43,8490	43,7990	0,29308	0,21899	0,08481
	Media	0,00000	-0,15302	0,14573
	Deviazione standard		4,3880	

I due valori sono pari, rispettivamente, a:

$$E(\varphi) = 0,95238 \quad \text{e} \quad \sigma_{\varphi} = 0,03366$$

Calcoliamo quindi i tassi di rendimento, r_i , dei singoli elementi della polizza utilizzando la seguente formula:

$$r_i = \frac{z}{V} - 1$$

dove z sono i *payoffs* della polizza e V è il suo valore corrente.

Poi calcoliamo gli *excess rates of return* $s_i \equiv r_i - r$ e il valore atteso $E(\varphi s)$ che, come richiede l'Equazione (7), è nullo.

Quindi calcoliamo la media, $E(s)$, e la deviazione standard, σ_s , degli *excess returns*, che risultano pari, rispettivamente, a:¹⁴

$$E(s) = -0,15302 \quad \text{e} \quad \sigma_s = 4,3880$$

Quindi calcoliamo la covarianza tra il *pricing kernel*, φ , e gli *excess rates of return*, s_i :

$$\text{cov}(\varphi, s) = 0,14573$$

Possiamo quindi verificare sia la (8) sia la (9):

$$0,95238 \times (-0,15302) + 0,14573 = 0$$

$$|0,14573| \leq 0,03366 \times 4,3880 = 0,14770$$

Inoltre, dato che:

$$0,03366 \geq \frac{0,95238 \times |-0,15302|}{4,3880} = 0,03321$$

anche la (11), che esprime il *volatility bound*, è soddisfatta.

¹⁴ Si noti che il premio al rischio, definito come media degli *excess rates of return*, è negativo. Chi compra la polizza è disposto a entrare in un contratto con premio al rischio negativo per via della riduzione del rischio che il contratto comporta.

3. - Prezzi Arrow-Debreu

3.1 State-Price Density (SPD)

La *state-price density* (SPD), ossia la funzione di densità dei prezzi Arrow-Debreu, può essere stimata in base ai prezzi dei titoli negoziati sul mercato, com'è stato suggerito da Ross (1976), Banz-Miller (1978) e Breeden-Litzenberger (1978).¹⁵

Nel modello di Black-Scholes-Merton, in cui si ipotizza che la dinamica seguita dai prezzi delle azioni sia rappresentata dal moto geometrico Browniano, ossia da un processo stocastico a "tempo continuo" (*continuous time*) e a "variabile continua" (*continuous variable*), la *state-price density* è continua e gli *state-securities* pagano un dollaro se lo stato risulta compreso tra x e $x + dx$.

Breeden-Litzenberger (1978) hanno dimostrato che la *state-price density* è pari alla derivata seconda dei prezzi delle opzioni rispetto ai prezzi d'esercizio.¹⁶ Ne segue che la funzione di densità degli *state-prices* può essere stimata esaminando le quotazioni dei *butterfly spreads*, ossia dei portafogli formati da due opzioni lunghe con prezzi d'esercizio estremi e da due opzioni corte con prezzo d'esercizio intermedio.¹⁷

3.2 Volatility Smiles

Com'è noto, le volatilità implicite sono quei valori di σ che, inseriti nella formula Black-Scholes-Merton, rendono i valori teorici

¹⁵ Si vedano Ross S.A. (1976); BANZ R.W. (1978) e BREEDEN D.T. - LITZENBERGER R.H. (1978).

¹⁶ Questi autori riconoscono a Fisher Black la paternità della scoperta, con la qualifica però che il risultato ottenuto da Black «era stato notato come curiosità matematica e non ricavato come proposizione generale». Si veda BREEDEN D.T. - LITZENBERGER R.H. (1978, p. 627, nota 7).

¹⁷ Infatti, la derivata seconda del prezzo di una *call* rispetto al prezzo d'esercizio è il limite del rapporto incrementale $[c(K - \Delta K) - 2c(K) + c(K + \Delta K)]/(\Delta K)^2$. Se $K_1 = K - \Delta K$, $K_2 = K$ e $K_3 = K + \Delta K$, con $\Delta K = 1$, il rapporto incrementale è pari al valore di un *butterfly spread*: $c(K_1) - 2c(K_2) + c(K_3)$.

delle opzioni uguali ai valori correnti di mercato. Se la formula Black-Scholes-Merton fosse valida, le volatilità implicite dovrebbero essere costanti, non dovrebbero cioè variare né in funzione del prezzo d'esercizio né della scadenza delle opzioni. Così non è.

Le configurazioni assunte dalle "superfici di volatilità" (*volatility surfaces*), ossia dai grafici che illustrano le volatilità implicite in funzione delle scadenze e dei prezzi d'esercizio delle opzioni, possono essere svariate, così come svariate sono le configurazioni assunte dalle strutture per scadenza delle volatilità e dai "sorrisi di volatilità" (*volatility smiles*), ossia dai grafici che rappresentano le volatilità implicite in funzione dei soli prezzi d'esercizio.

Le volatilità implicite sono variabili talmente seguite nei mercati delle opzioni che le quotazioni sono a volte espresse in termini di volatilità implicite (sotto l'ipotesi che il modello adottato sia quello di Black-Scholes-Merton), piuttosto che in termini di prezzi.

In assenza di opportunità di arbitraggio, il *volatility smile* calcolato in base ai prezzi delle *calls* deve essere uguale a quello calcolato in base ai prezzi delle *puts*. Se così non fosse, ci sarebbe una violazione della *put-call parity*. Pertanto, quando i *traders* si riferiscono a una certa relazione tra volatilità implicite e prezzi di esercizio, non è necessario che specificino a che tipo di opzioni si riferiscono, dato che la stessa relazione deve valere tanto per le *calls* quanto per le *puts*.

In genere, le volatilità implicite che si osservano nei mercati delle opzioni su azioni assumono l'aspetto tipico di una «smorfia» (*skew*) o di un "ghigno" (*smirk*), ossia di una curva che diminuisce al crescere del prezzo d'esercizio.¹⁸

Un modello che può spiegare la forma decrescente dei *volatility smiles* osservati sui mercati azionari è il modello a "elasticità della varianza costante" (*constant elasticity of variance* - CEV) proposto da Cox (1975).¹⁹

Un altro modello coerente con l'inclinazione negativa del vo-

¹⁸ Invece, nel caso delle opzioni su valute la volatilità implicita è minima per le opzioni *at the money* e diventa progressivamente più elevata via via che l'opzione diventa *in the money* o *out of the money*. Ne segue che il *volatility smile* assume davvero l'aspetto di un "sorriso".

¹⁹ Si veda Cox J.C. (1975).

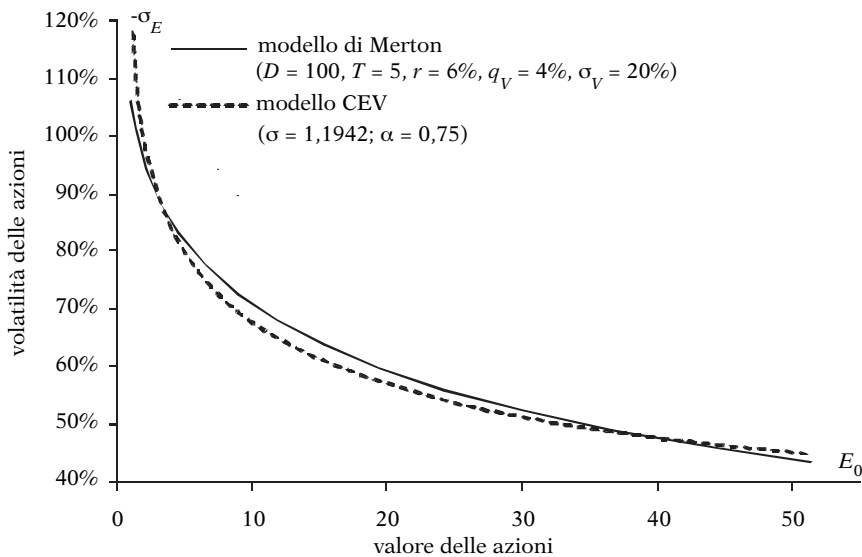
latility smile è il modello di Merton (1974), in cui la dinamica del prezzo delle azioni dipende dal valore delle attività aziendali e dal grado di *leverage* dell'azienda.²⁰

Se si confrontano le volatilità delle azioni risultanti dal modello di Merton con quelle risultanti dal modello CEV, si vede che le due funzioni differiscono quanto a convessità, ma sono ragionevolmente simili (grafico 1).

Tuttavia, a parità di altre condizioni, è preferibile il modello di Merton che, diversamente dal modello CEV, offre un'interessante chiave interpretativa: l'aumento del prezzo delle azioni fa ridurre il rapporto "debito/capitale proprio" (*debt-equity ratio*) dell'impresa, con conseguente riduzione della volatilità degli utili e della volatilità del prezzo delle azioni.

GRAF. 1

MODELLO DI MERTON E MODELLO CEV:
VOLATILITÀ DELLE AZIONI



²⁰ Si veda MERTON R.C. (1974).

3.3 Opzioni composte

Nel modello di Merton le azioni vengono viste come *calls* scritte sul valore delle attività aziendali. Ne segue che le opzioni *call* e *put* su azioni sono opzioni composte (*calls* su *calls* o *puts* su *calls*). Possono valutate con le formule di Geske (1977).²¹

Se le azioni vengono viste come opzioni *call* sul valore delle attività aziendali, con prezzo d'esercizio D e scadenza T_D , il valore delle opzioni *call* e *put* europee, con prezzo d'esercizio K e scadenza T , scritte sulle azioni è pari a:

$$(12) \quad \begin{aligned} c &= V_0 e^{-q_V T_D} M(a_1, b_1; \sqrt{T/T_D}) - D e^{-r T_D} M(a_2, b_2; \sqrt{T/T_D}) \\ &\quad - e^{-r T} K N(a_2) \\ p &= D e^{-r T_D} M(-a_2, b_2; -\sqrt{T/T_D}) - V_0 e^{-q_V T_D} M(-a_1, b_1; -\sqrt{T/T_D}) \\ &\quad + e^{-r T} K N(-a_2) \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln(V_0 / V^*) + (r - q_V + \sigma_V^2 / 2) T}{\sigma_V \sqrt{T}}; & a_2 &= a_1 - \sigma_V \sqrt{T} \\ b_1 &= \frac{\ln(V_0 / D) + (r - q_V + \sigma_V^2 / 2) T_D}{\sigma_V \sqrt{T_D}}; & b_2 &= b_1 - \sigma_V \sqrt{T_D}. \end{aligned}$$

M è la funzione di distribuzione normale bivariata; misura la probabilità che la prima variabile sia minore di a e che la seconda sia minore di b quando il coefficiente di correlazione tra le due è ρ ;

V^* sta a indicare il valore delle attività aziendali (al tempo T) che comporta un prezzo delle azioni pari a K . Se il valore delle attività aziendali è maggiore di V^* , la *call* viene esercitata. In caso contrario, è la *put* che viene esercitata.

²¹ Si veda GESKE R. (1977).

Esempio 3.1

Sia $V_0 = 891,9441$; $D = 1.000$; $T_D = 5$; $q_V = 0,3\%$; $\sigma_V = 2,3\%$; $r = 5\%$; $K = 100$, $T = 1$, dove T_D è la scadenza del debito e T è la scadenza della *call* europea, con prezzo d'esercizio K , scritta sulle azioni emesse dalla società (grafico 2).

GRAF. 2

MODELLO MERTON-GESKE: VALORE CORRENTE DI UNA CALL

Opzioni su azioni (Modello Merton-Geske)	
Valore delle attività (V_0)	891,9441
Valore nominale del debito (D)	1.000,0000
Scadenza del debito (T_D)	5
Payout rate (q_V)	0,30%
Volatilità delle attività (σ_V)	2,30%
Tasso d'interesse privo di rischio (r)	5,00%
Prezzo d'esercizio dell'opzione (K)	100
Scadenza dell'opzione (T)	1
Valore delle azioni (E_0)	100,0000
Dividend yield (q_E)	2,68%
Volatilità delle azioni (σ_E)	20,03%
Valore (cc, cp, pc o pp)	10,6481 call su call

In tal caso, il valore corrente delle azioni è pari a 100, il *dividend yield* è pari al 2,68 per cento e la volatilità delle azioni è pari al 20,03 per cento. Inoltre, il valore corrente della *stock option* (una *call* su *call*) è pari a 10,6481.

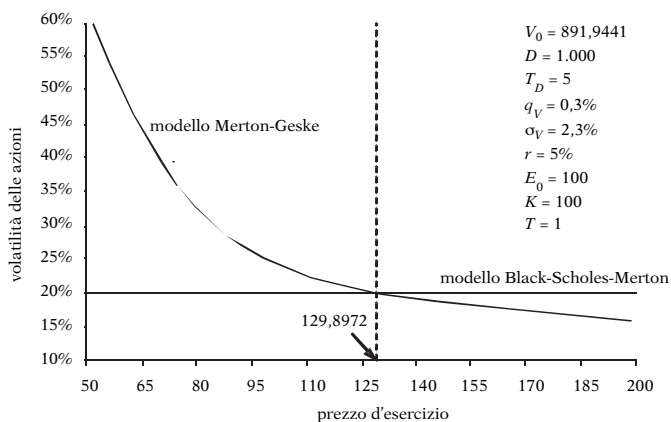
Per ricavare il *volatility smile* che si osserverebbe sul mercato se gli operatori utilizzassero il modello Merton-Geske, sono stati calcolati i valori teorici delle opzioni *call* per diversi *strikes*:

Strike (K)	Modello Merton-Geske		Modello Black-Scholes-Merton	
	Valore teorico (c)	Volatilità implicita (σ)	Valore teorico (c)	Volatilità implicita (σ)
50	52,45286	63,08%	49,79878	20,03%
70	33,74898	40,31%	30,95273	20,03%
90	17,09809	27,97%	14,62012	20,03%
100	10,64812	24,78%	8,84756	20,03%
130	1,24236	20,02%	1,24458	20,03%
160	0,03974	17,69%	0,10879	20,03%
200	0,00005	15,73%	0,00291	20,03%

Le volatilità implicite, ottenute per trasformazione dei prezzi, sono riportate nel grafico 3. Come si vede, il *volatility smile* ha la tipica inclinazione negativa. Al contrario, il *volatility smile* sarebbe piatto al livello del 20,03 per cento se gli operatori utilizzassero il modello Black-Scholes-Merton. Le volatilità implicite dei due modelli si intersecano in corrispondenza di $K = 129,8972$.

GRAF. 3

MERTON-GESKE E BLACK-SCHOLES-MERTON: VOLATILITY SMILE



3.4 Modello di Merton e prezzi Arrow-Debreu

Nel modello di Merton, la variabile di stato è V_T . I prezzi Arrow-Debreu sono definiti dalla seguente *state-price density*:

$$(13) \quad \varphi(V_T) = \frac{e^{-rT} N'(d_2)}{V_T \sigma \sqrt{T}}$$

dove

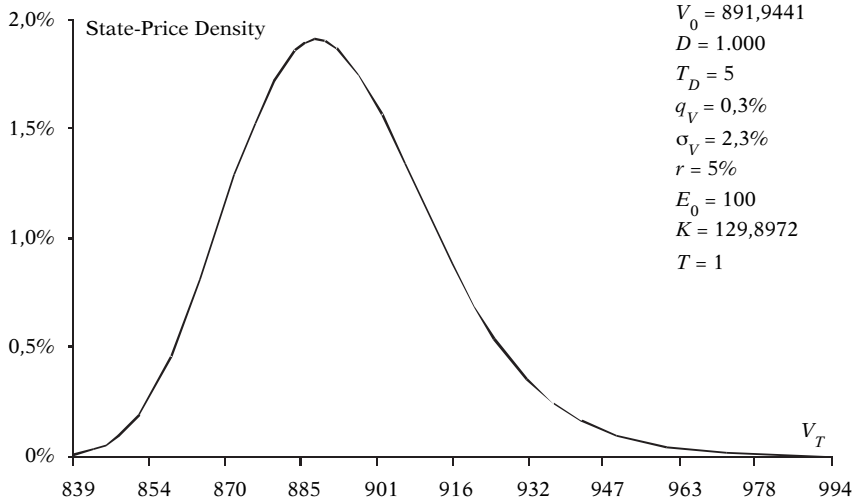
$$d_2 = \frac{\ln(V_0 / V_T) + (r - q_V - \sigma_V^2 / 2)T_D}{\sigma_V \sqrt{T_D}}$$

e N' è la funzione di densità della normale standardizzata.

La *state-price density* (13) per l'Esempio 3.1 (quando $K = 129,8972$) è mostrata nel grafico 4.

GRAF. 4

MODELLO DI MERTON: STATE-PRICE DENSITY



4. - Stima del modello Merton-Geske

Come si è detto nel precedente paragrafo, la *state-price density* può essere stimata in base ai prezzi dei titoli negoziati sul mercato. In questo paragrafo vengono presentati i risultati di una verifica empirica volta a stimare le *state-price densities* per diverse scadenze in base alle opzioni sullo S&P 500 negoziate alla Chicago Board Options Exchange, uno dei mercati ritenuti più efficienti. Le *state-price densities* ottenute sono coerenti con il modello Merton-Geske.

4.1 Opportunità di arbitraggio

Prima di stimare la *state-price density* coerente con il modello Merton-Geske, è stata condotta un'estesa verifica empirica su dati infra-giornalieri volta ad accertare l'assenza di opportunità di

arbitraggi. L'algoritmo utilizzato, che risolve un problema di programmazione lineare, è quello suggerito da Mark Garman.²²

Garman chiama *hedge portfolios* i portafogli formati da posizioni lunghe e corte su *forwards*, *calls* e *puts* scritti sulla stessa attività e con la stessa scadenza. Dato che un *forward* lungo è assimilabile ad una *call* lunga (o una *put* corta) con probabilità d'esercizio unitaria ed un *forward* corto è assimilabile ad una *call* corta (o una *put* lunga) con probabilità d'esercizio unitaria, tutti gli "elementi" del portafoglio vengono chiamati indistintamente "opzioni". Le opzioni considerate sono tutte europee.

I *payoffs* che si ottengono combinando tra loro le opzioni sono "funzioni lineari spezzate" (*piecewise linear functions*) del valore dell'attività sottostante alla scadenza.

In generale, ogni *piecewise linear function* con n "punti di discontinuità" (*breakpoints*) $[K_0 (= 0), K_1, \dots, K_{n-1}]$ può essere scomposta facendo ricorso a due soli tipi di funzioni base, la *Heaviside step function* e la *ramp function*. La *step function* consente di misurare il "salto" (*jump*) della *piecewise linear function* in corrispondenza del *breakpoint*, mentre la *ramp function* rileva il cambio di pendenza in quel punto.

Garman utilizza i vettori per rappresentare il profitto (o la perdita) delle sei posizioni fondamentali su opzioni e *forwards* (*long call*, *short call*, *long put*, *short put*, *long forward*, *short forward*).

Ogni vettore contiene 4 parametri: i primi due moltiplicano i valori della *step function* nei *breakpoints* $K_0 = 0$ e $K_1 = K$, mentre gli ultimi due moltiplicano i valori della *ramp function* negli stessi *breakpoints*.

Garman definisce poi delle "variabili di *surplus*" (*surplus variables*), che assumono valori strettamente positivi solo quando l'*hedge portfolio* assicura un profitto, ed imposta infine un problema di programmazione lineare che consiste nel massimizzare la somma delle *surplus variables* sotto il vincolo che il portafoglio non generi mai perdite.

²² Si veda GARMAN M.B. (1976). Una modifica dell'algoritmo di Garman, che ne migliora l'efficienza, è stata proposta nella mia tesi di laurea triennale. Cfr. BARONE G. (2005, pp. 27-48).

Nei prossimi esempi sono esposte due opportunità d'arbitraggio individuate grazie all'algoritmo di Garman.

Esempio 4.1

Un'opportunità arbitraggio si è presentata l'11 aprile 2007. Alle 11:54 (ora di NYC) si potevano osservare le seguenti quotazioni per la scadenza del 20 giugno 2008:

<i>Contratto</i>	<i>Strike</i>	<i>Bid</i>	<i>Ask</i>
<i>Futures</i>	–	1.493,8	1.495,8
<i>Call</i>	1.000	471,4	474,0
<i>Put</i>	1.000	3,9	4,9
<i>Call</i>	1.600	35,0	37,4
<i>Put</i>	1.600	130,3	132,9

L'algoritmo di Garman ha individuato il seguente portafoglio d'arbitraggio:

<i>Contratto</i>	<i>Posizione</i>	<i>Quantità</i>	<i>Strike</i>	<i>Prezzo</i>	<i>Entrate (Uscite)</i>
<i>Futures</i>	lunga	1,000000	–	1.495,8	0,000000
<i>Call</i>	corta	-0,173667	1.000	471,4	81,866467
<i>Put</i>	lunga	0,173667	1.000	4,9	-0,850967
<i>Call</i>	corta	-0,826333	1.600	35,0	28,921667
<i>Put</i>	lunga	0,826333	1.600	132,9	-109,819700

Il profitto d'arbitraggio è pari alla somma algebrica delle entrate/uscite associate ai singoli contratti presenti nel portafoglio

$$\begin{aligned} & \$0 + \$81,866467 - \$0,850967 + \$28,921667 \\ & - \$109,8197 = \$0,1174667 \end{aligned}$$

ossia a \$0,1174667. Naturalmente, ampliando la “scala” dell'operazione – a prezzi invariati – il profitto sarebbe stato pari ad un multiplo di quello indicato.

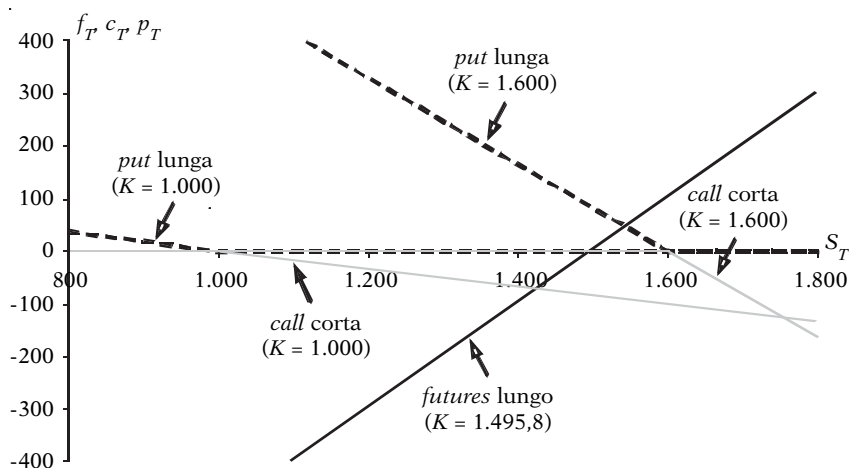
Il portafoglio d'arbitraggio è effettivamente privo di rischio: il suo valore finale è sempre nullo, quale che sia il livello dello S&P 500, come mostra la tavola seguente.

Contratto	Quantità	$S_T < 1.000$	$1.000 \leq S_T < 1.600$	$1.600 \leq S_T$
f_0	1,000000	$S_T - 1.495,8$	$S_T - 1.495,8$	$S_T - 1.495,8$
$-c_1$	-0,173667	0	$-(S_T - 1.000) \times 0,173667$	$-(S_T - 1.000) \times 0,173667$
p_1	0,173667	$(1.000 - S_T) \times 0,173667$	0	0
$-c_2$	-0,826333	0	0	$-(S_T - 1.600) \times 0,826333$
p_2	0,826333	$(1.600 - S_T) \times 0,826333$	$(1.600 - S_T) \times 0,826333$	0
Totale		0	0	0

La mancanza di rischio del portafoglio può anche essere illustrata graficamente.

GRAF. 5

VALORE FINALE DI UN PORTAFOGLIO
D'ARBITRAGGIO (Esempio 4.1)



Nel grafico 5 le cinque linee tratteggiate mostrano il valore finale delle singole componenti del portafoglio mentre la linea continua spessa, che coincide con l'asse delle ascisse, mostra il valore finale complessivo dell'intero portafoglio. Il portafoglio d'arbitraggio è stato costruito andando lungo su un *futures* e coprendo la posizione con un *forward* corto sintetico. A sua volta, il *forward* corto sintetico con prezzo di consegna 1.495,8 ($= 0,173667 \times 1.000$

+ $0,826333 \times 1.600$) è stato ottenuto come media ponderata di altri due *forward* corti sintetici con prezzi di consegna 1.000 e 1.600.

Esempio 4.2

Un'altra opportunità arbitraggio si è presentata lo stesso giorno alle 10:24, quando si potevano osservare le seguenti quotazioni per la scadenza del 19 dicembre 2008:

<i>Contratto</i>	<i>Valore Nominale /Strike</i>	<i>Bid</i>	<i>Ask</i>
<i>Bond</i>	1.000	917,4939	919,0645
<i>Futures</i>	–	1.522,8	1.524,8
<i>Call</i>	600	843,6	846,2
<i>Put</i>	600	0,2	0,6

L'algoritmo di Garman ha individuato il seguente portafoglio d'arbitraggio:

<i>Contratto</i>	<i>Posizione</i>	<i>Quantità</i>	<i>Strike</i>	<i>Prezzo</i>	<i>Entrate (Uscite)</i>
<i>Bond</i>	corta	-0,922800	1.000	917,4939	846,663369
<i>Futures</i>	corta	-1,000000	–	1.522,8	0
<i>Call</i>	lunga	1,000000	600	846,2	-846,2
<i>Put</i>	corta	-1,000000	600	0,2	0,2

Il profitto d'arbitraggio è pari alla somma algebrica delle entrate/uscite associati ai singoli contratti presenti nel portafoglio

$$\$846,663369 + \$0 - \$846,2 + \$0,2 = \$0,663369$$

ossia a \$0,663369. Anche in questo caso, ampliando la “scala” dell'operazione – a prezzi invariati – il profitto poteva essere pari ad un multiplo di quello indicato.

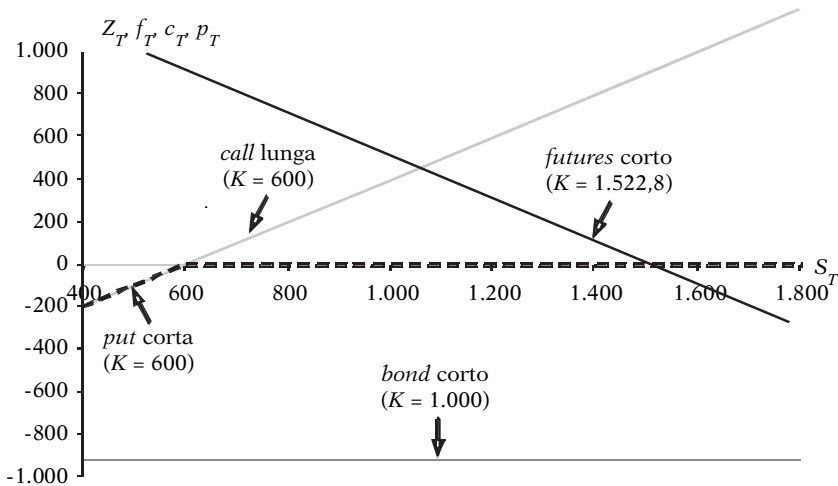
Anche questo portafoglio è effettivamente privo di rischio, essendo sempre nullo il suo valore alla scadenza (quale che sia il livello dello S&P 500):

Contratto	Quantità	$S_T < 600$	$600 \leq S_T < 1.000$	$1.000 \leq S_T$
$-Z_0$	-0,922800	$-0,922800 \times 1.000$	$-0,922800 \times 1.000$	$-0,922800 \times 1.000$
$-f_0$	-1,000000	$-(S_T \times 1.522,8)$	$-(S_T \times 1.522,8)$	$-(S_T \times 1.522,8)$
c	1,000000	0	$S_T \times 600$	$S_T \times 600$
$-p$	-1,000000	$-(600 - S_T)$	0	0
Totale		0	0	0

La composizione del portafoglio è illustrata nel grafico 6.

GRAF. 6

VALORE FINALE DI UN PORTAFOGLIO
D'ARBITRAGGIO (Esempio 4.2)

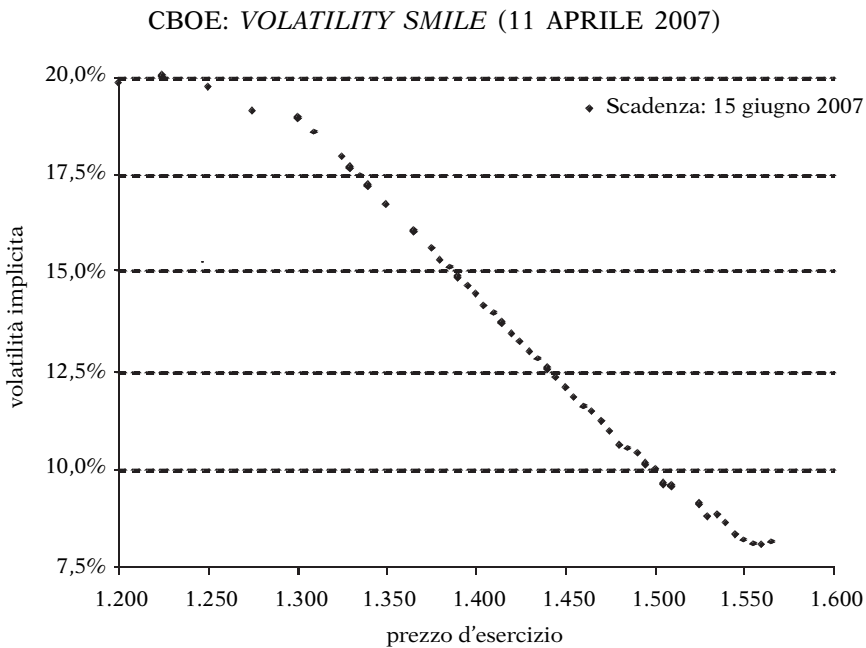


Il portafoglio d'arbitraggio è stato costruito andando corti su uno *zero-coupon bond* con valore finale pari a 922,8 e coprendo la posizione con uno *zero-coupon bond* lungo sintetico con uguale valore finale ($922,8 = 1.522,8 - 600$). A sua volta, lo *zero-coupon bond* lungo sintetico è stato ottenuto andando corti su un *futures*, con *delivery price* di 1.522,8, e lunghi su un *forward* sintetico (*call* lunga e *put* corta) con *delivery price* di 600.

4.2 Procedura di stima

Per la stima dei parametri del modello Merton-Geske sono state utilizzate le quotazioni delle S&P500 *options* trattate alla Chicago Board Options Exchange l'11 aprile 2007 (ore 12:04). In quella data erano quotate 442 *calls* e altrettante *puts*. Le volatilità implicite mostravano marcati *smiles*. Ad es., nel caso delle opzioni con scadenza 15 giugno 2007, le volatilità implicite delle *deep-in-the money calls* erano pari a circa il 20 per cento mentre quelle delle *deep-out-of-the money calls* si aggiravano intorno al 7-8 per cento (grafico 7).

GRAF. 7



Avendo accertato l'inesistenza di opportunità di arbitraggio e quindi il rispetto della *put-call parity*, è possibile limitarsi a stimare i parametri del modello sulla base delle sole *calls*.

Le S&P500 *options* negoziate al CBOE sono opzioni europee

scritte sul prodotto tra 100 e il livello dell'indice. Alle 12:04 dell'11 aprile 2007 il livello dell'indice era pari a 1.442,9.

Le scadenze delle opzioni erano 14: le prime opzioni scadevano dopo 2 giorni e le ultime dopo 2 anni e 8 mesi. I prezzi d'esercizio erano 103, da 600 a 2.000.

Per stimare i parametri del modello ci si è avvalsi del Risolutore di Excel™ avendo come obiettivo la minimizzazione della somma dei quadrati degli scarti tra i valori teorici e i valori effettivi delle opzioni.²³ Tra le opzioni è incluso anche l'indice, considerato come una *call* ordinaria, con prezzo d'esercizio D e scadenza T_D , scritta sul valore delle attività aziendali.

Il valore teorico, c , delle *calls* è dato dalla formula (12) di Geske. Il valore teorico, E_0 , dell'indice è dato dalla consueta formula di Black-Scholes-Merton. I tassi d'interesse privi di rischio appropriati per le scadenze delle opzioni e del debito sono stati determinati in modo coerente con i prezzi dei *3-month Eurodollar futures* rilevati simultaneamente alla Chicago Mercantile Exchange.²⁴

I parametri da stimare sono:

V_0 : il valore corrente delle attività;

D : il valore nominale del debito;

T_D : la scadenza del debito;

σ_V : la volatilità delle attività;

q_V : il *payout ratio* delle attività.

Tra i dati di *output*, oltre al valore teorico (E_0) dell'indice, figurano il *dividend yield* (q_E) e la volatilità (σ_E) dell'indice.

Primo Tentativo. Il problema di minimizzazione è stato impostato imponendo i seguenti vincoli:

1. uguaglianza tra valore effettivo e teorico dell'indice (1.442,9);

2. *dividend yield* pari all'1,88 per cento (stima riportata sul sito www.indexarb.com);

²³ «La *routine* funziona bene se strutturiamo lo *spreadsheet* in modo che i parametri da stimare abbiano valori all'incirca uguali». Cfr. HULL J.C. (2009, p. 515).

²⁴ I tassi composti continuamente per le scadenze delle opzioni sono compresi tra il 5,91% a 1 giorno e il 4,95% a 32 mesi. Il tasso appropriato per la scadenza quinquennale del debito è pari al 5,00%. La metodologia di calcolo è esposta nella mia tesi di laurea magistrale: Cfr. BARONE G. (2007, pp. 112-118).

3. volatilità dell'indice pari al 15,76 per cento (livello della volatilità implicita nelle *at-the-money calls* di più lunga scadenza).

Il Risolutore non è stato in grado di trovare una soluzione.

Secondo Tentativo. Nel secondo tentativo si è imposto il vincolo che il valore nominale del debito, D , fosse uguale a 1.000, un livello comparabile a quello dell'*equity* (1.442,9), e che la sua vita residua fosse uguale a 5 anni, per omogeneità con lo *standard* utilizzato nel settore dei derivati creditizi.

La scelta della scadenza quinquennale per il debito è supportata dai risultati ottenuti da Geske e Zhou (2009) in un'estesa verifica empirica del modello Merton-Geske.²⁵ Questi autori hanno condotto una meticolosa ricerca, basata sui dati di bilancio di ogni singola impresa, per determinare in modo esogeno il valore nominale del debito e la sua *duration*.²⁶ Le nostre stime $V_0 =$

²⁵ Il lavoro citato non mi era noto quando ho scritto la tesi di laurea da cui questo lavoro è tratto. Secondo GESKE R. - ZHOU Y. (2009, p. 9, testo e nota 12), la *duration* media del debito del campione su cui si basa l'indice S&P 500 è prossima ai 5 anni: «Le stime da noi ottenute sulla base di dati giornalieri relativi a 100 mesi degli anni 1996-2004 mostrano che la *duration* del debito – nel bilancio aggregato delle 500 imprese presenti nell'indice S&P 500 – è stata in media pari a 4,71 anni. ... Abbiamo anche riscontrato che le variazioni della *duration* del debito sono piccole, essendo i valori compresi tra 4,5 e 5,1 anni. Ciò implica che il nostro modello stilizzato, che concentra il debito ad una specifica *duration*, funziona bene».

²⁶ Il valore nominale della complessa struttura debitoria delle imprese è stato approssimato aggregando diverse voci di bilancio, classificate per scadenza. Si veda GESKE R. - ZHOU Y. (2009, p. 17): «Le informazioni sui dati di bilancio, annuali e trimestrali, sono state tratte da Compustat, un *database* di Standard & Poor's. Il valore contabile dei dati sul debito è riportato in sei raggruppamenti a seconda della scadenza: 1, 2, 3, 4, 5 anni (voci 44, 91, 92, 93, 94) e maggiore di 5 anni (voce 9 meno voci 91-94). Per quest'ultimo raggruppamento si è ipotizzata una scadenza di 7 anni. A questi dati abbiamo aggiunto – nel raggruppamento ad 1 anno – “passività correnti” (*current liabilities*) (voce 5), “risconti attivi” (*deferred charges*) (voce 152), “ratei passivi” (*accrued expenses*) (voce 153), “cambiali e altri titoli di debito a breve termine” (*short term notes payable*), “imposte federali, estere o statali differite” (*deferred federal, foreign, and state taxes*) (voci 206, 269, 270, 271). Tutte le “obbligazioni a lungo termine legate al *prime rate*” (*long-term debt tied to prime*) (voce 148) e le “obbligazioni non garantite” (*debentures*) (voce 82) sono state incluse nel raggruppamento a 7 anni.²³ [Questa scelta si basa sui risultati ottenuti da Guedes e Opler (*Journal of Finance*, vol. 51, n. 5, 1996, p. 1818). Secondo questi autori, la *duration* media di un campione composto da 7.362 obbligazioni societarie statunitensi a lungo termine è stata pari a 7 anni negli anni 1982-1993.] Per ciascuno dei giorni in cui è stata condotta la nostra analisi, il valore nominale complessivo del debito delle imprese considerate dall'indice S&P 500 è stato uguagliato alla somma dei valori così ottenuti per ciascuna impresa nel trimestre in questione». (traduzione propria).

2.351,12, $q_V = 1,13$ per cento e $\sigma_V = 9,67$ per cento sono state invece ottenute sulla base di valori *ad hoc* del debito e della sua *duration* ($F = 1.000$, $T_D = 5$). È questo un punto chiave che condiziona i risultati ottenuti.

Il valore corrente del debito, pari alla differenza tra valore delle attività, V_0 , e valore delle azioni, E_0 , è risultato pari a 908,2 (= 2.351,12 - 1.442,9). Pertanto, la quota delle attività spettante agli obbligazionisti è risulta pari al 38,6 (= 908,2 / 2.351,12) per cento.

La stima del *payout ratio*, q_V , indica che l'1,13 per cento delle attività viene liquidato ogni anno per distribuire i dividendi agli azionisti.

La volatilità delle attività aziendali, σ_V , rappresenta una misura del "rischio operativo" (*business risk*) affrontato dalle società considerate dallo S&P 500. Il livello del 9,67 per cento è all'incirca pari a 2/3 di quello di un investimento finanziario diversificato (essendo la volatilità dell'indice pari al 15,76 per cento).

L'errore *standard*, definito come deviazione *standard* dei differenziali tra valori effettivi e valori teorici dei contratti, è risultato pari a 17,7, ossia al 10,5 per cento del prezzo medio delle opzioni (169,4).

Terzo Tentativo. Per ridurre l'errore *standard*, si è provato ad eliminare i tre vincoli riguardanti E_0 , q_V e σ_V , mantenendo $D = 1.000$ e $T_D = 5$. In tal caso, l'errore *standard* si è ridotto a 10,5 e le stime "non vincolate" dei parametri sono state le seguenti: $V_0 = 2.350,3$ (contro 2.351,12), $q_V = 1,19$ per cento (contro 1,13), $\sigma_V = 7,01$ per cento (contro 9,67), $E_0 = 1.435,9$ (contro 1.442,9), $q_E = 1,99$ per cento (contro 1,88) e $\sigma_E = 11,48$ per cento (contro 15,76).

Riducendo il valore e la volatilità delle attività e aumentando il *payout ratio*, l'algoritmo ha ridotto il valore teorico delle opzioni e ha portato pressoché a zero la media degli errori (che era in precedenza negativa e segnalava una sottovalutazione delle *calls* da parte del mercato rispetto al modello). È rimasta, però, una marcata sistematicità degli errori: positivi all'inizio e poi via via sempre più negativi. Secondo il modello, le quotazioni delle *calls* con scadenza più vicina dovrebbero essere mediamente più basse

mentre le quotazioni delle *calls* con scadenza più lontana dovrebbero essere mediamente più alte.

In base alla *put-call parity*, la presunta sottovalutazione (da parte del mercato) delle *calls* con scadenza più lontana si traduce nella sopravvalutazione delle corrispondenti *puts*. Sembra quindi che il mercato assegni alla contrazione dei corsi per le scadenze più lontane una probabilità più elevata di quella stimata dal modello, coerentemente con l'ipotesi di *crash-fobia* avanzata da Rubinstein (1994, pp. 774-775):

... il modello Black-Scholes ha funzionato piuttosto bene durante il 1986. ... Tuttavia, nel corso del 1987 la situazione ha cominciato a deteriorarsi, con errori percentuali che si sono pressoché raddoppiati. Il 1988 rappresenta una sorta di discontinuità nel tasso di deterioramento, e ogni anno successivo mostra errori percentuali via via maggiori. Si può ipotizzare che il crash azionario dell'ottobre 1987 abbia cambiato l'atteggiamento degli operatori nei confronti delle opzioni su indici azionari. Le out-of-the-money puts ... sono diventate molto più care. Negli anni dal 1990 al 1992 (così come oggi) le volatilità implicite nelle opzioni con bassi prezzi d'esercizio sono state significativamente più elevate di quelle relative alle opzioni con alti prezzi d'esercizio. ... Dai tempi del crash, la valutazione delle opzioni su indici azionari espressa dal mercato sembra indicare un fenomeno sempre più marcato di crash-fobia ...

(traduzione propria)

È comunque possibile che le quotazioni delle opzioni di più lunga scadenza non trasmettano informazioni significative, data la loro scarsa liquidità. La presenza di opportunità di arbitraggio riscontrata nelle analisi svolte è di supporto a quest'ipotesi.

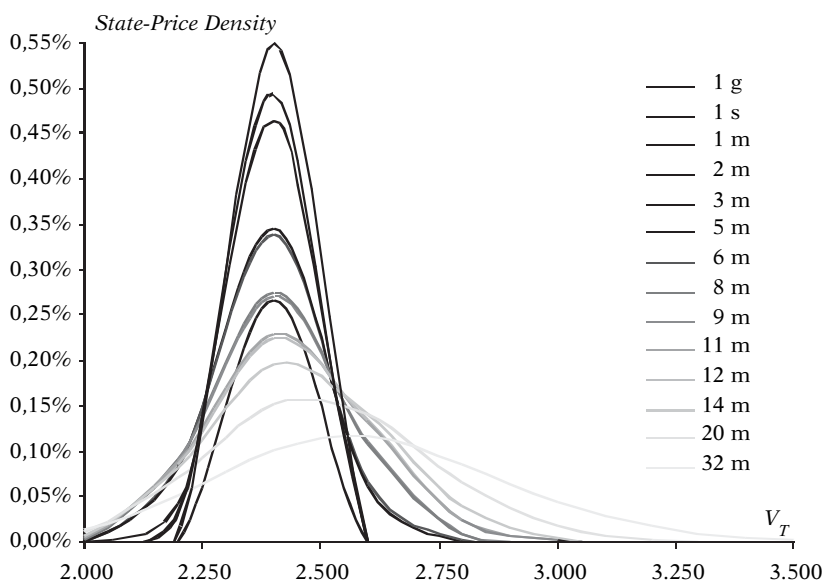
4.3 Prezzi Arrow-Debreu

Utilizzando la formula (13) sono state infine stimate le *state-*

price densities per le 14 scadenze delle opzioni trattate al CBOE (grafico 8). Naturalmente, le funzioni di densità più “piatte” sono quelle relative alle scadenze più lontane.

GRAF. 8

MODELLO MERTON-GESKE (STIME NON VINCOLATE):
STATE-PRICE DENSITIES



5. - Conclusioni

In questo lavoro si è proposto un metodo parametrico a due stadi per estrarre informazioni dai prezzi delle opzioni sullo S&P 500. Nel primo stadio è stato utilizzato l’algoritmo di programmazione lineare proposto da Mark Garman per verificare l’assenza di opportunità di arbitraggi. Nel secondo stadio sono stati stimati i parametri del modello di Merton utilizzando la formula di Geske e considerando le opzioni sullo S&P500 come opzioni composte (*calls* su *call* o *puts* su *call*), scritte sul valore delle attività aziendali del *basket* sottostante. Sulla base delle stime del model-

lo, è stato poi possibile calcolare le *state-price densities* per le diverse scadenze delle opzioni.

Il modello Merton-Geske, che è coerente con l'ipotesi di una relazione inversa tra prezzi delle azioni e volatilità condizionata, consente di estrarre dai prezzi delle opzioni interessanti indicazioni sul valore di mercato del debito delle imprese sottostanti e sul loro *business risk*. Le stime ottenute rappresentano una novità per la letteratura in tema di opzioni, analogamente a quelle riportate da Geske e Zhou (2009) in un'estesa analisi empirica che ha messo in evidenza il ruolo chiave svolto dal *leverage* nella valutazione delle opzioni.

BIBLIOGRAFIA

- AÏT-SAHALIA Y. – LO A.W., «Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices», *Journal of Finance*, April, vol. 53, n. 2, 1998, pp. 449-547.
- ARROW K.J., «Le rôle de valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques», in *Econométrie*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, vol. 11, 1953, pp. 41-47; tradotto in inglese col titolo di «The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing», *Review of Economic Studies*, April, vol. 31, n. 2, 1964, pp. 91-96; ristampato con l'aggiunta di nuovi commenti e col nome di *Essay 4 in Essays in the Theory of Risk Bearing*, Chicago, Markham, 1971, pp. 121-133; ristampato nei *Collected Papers of Kenneth J. Arrow: General Equilibrium*, vol. II, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1983, pp. 46-47.
- BANZ R.W. - MILLER M.H., «Prices for State-Contingent Claims: Some Estimates and Applications», *Journal of Business*, October, vol. 51, n. 4, 1978, pp. 653-672.
- BARONE G., *Arbitraggi e algebra di Garman*, Tesi di laurea triennale in Economia dei Mercati e degli Intermediari Finanziari, Luiss - Guido Carli, 18 luglio 2005.
- - —, *Arbitraggi e prezzi Arrow-Debreu*, Tesi di laurea magistrale in Economia e Finanza, Luiss - Guido Carli, 26 luglio 2007.
- BREEDEN D.T. - LITZENBERGER R.H., «Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices», *Journal of Business*, October, vol. 51, n. 4, 1978, pp. 621-651.
- COX J.C., «Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusion», Unpublished Note, Graduate School of Business, Stanford University, 1975, anche in *Journal of Portfolio Management*, December, Special Issue, A Tribute to Fischer Black, 1996, pp. 15-17.
- DE FELICE M. - MORICONI F. (a cura di), *Il Principio di Arbitraggio*, Il Mulino, 1996.
- DYBVIIG P.H. - ROSS S.A., «Arbitrage», in EATWELL J. - MILGATE M. - NEWMAN P. (eds.), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London, Macmillan Press, vol. 1, 1996, pp. 100-106.
- - —, — - —, «Arbitrage, State Prices and Portfolio Theory», in CONSTANTINIDES H. - STULZ R. (eds.), *Handbook of the Economics of Finance*, November, vol. 1B, NorthHolland, 2003, pp. 605-637.
- GARMAN M.B., «An Algebra for Evaluating Hedge Portfolios», *Journal of Financial Economics*, n. 3, 1976, pp. 403-427.
- GESKE R., «The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November, vol. 12, n. 4, 1977, pp. 541-552.
- GESKE R. - ZHOU Y., «A New Methodology For Measuring and Using the Implied Market Value of Aggregate Corporate Debt in Asset Pricing: Evidence from S&P 500 Index Put Option Prices», *Working Paper*, January 2007 (Latest version: January 2009).
- HANSEN L.P. - JAGANNATHAN R., «Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies», *Journal of Political Economy*, April, vol. 99, n. 2, 1991, pp. 225-262.
- HULL J.C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, edizione italiana a cura di Emilio Barone, Pearson, Paravia, Bruno Mondadori, 7^a ed., 2009.
- MERTON R.C., «On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates», *Journal of Finance*, May, vol. 29, n. 2, 1974, pp. 449-470, ristampato con

- note aggiornate in MERTON R.C., *Continuous-Time Finance*, Chapter 12, Malden, MA, Blackwell, 1990, pp. 388-412.
- ROSS S.A., «Options and Efficiency», *The Quarterly Journal of Economics*, February, vol. 90, n. 1, 1976, pp. 75-89.
- - —, *Neoclassical Finance*, Princeton University Press, 2005.
- RUBINSTEIN M., «Implied Binomial Trees», *Journal of Finance*, July, vol. 59, n. 3, 1994, pp. 771-818.
- - —, *Derivati*, edizione italiana a cura di Luca Barone, Il Sole 24 Ore, 2005.
- - —, *A History of the Theory of Investments - My Annotated Bibliography*, John Wiley & Sons, 2006.
- SCHOLES M.S. - WOLFSON M.A., «Decentralized Investment Banking: The Case of Discount Dividend-Reinvestment and Stock-Purchase Plans», *Journal of Financial Economics*, September, vol. 24, n. 1, 1989, pp. 7-35.
- SHARPE W., «Nuclear Financial Economics», in BEAVER W.H. - PARKER G., *Risk Management: Problems & Solutions*, McGraw-Hill, 1995, pp. 17-36.
- SMITH V.L., *Constructivist and Ecological Rationality in Economics*, Nobel Prize Lecture, 2002.
- VON HAYEK F.A., «The Use of Knowledge in Society», *American Economic Review*, September, vol. 35, n. 4, 1945, pp. 519-530.

