

Strategie di offerta ottima con annuncio del prezzo di riserva*

Giovanni Walter Puopolo*

Università «Federico II», Napoli

Questo saggio intende presentare una modellizzazione dell'equilibrio di Bayes-Nash simmetrico in un asta FPSB ad acquisto, quando il banditore annuncia l'esistenza di un prezzo di riserva, noto a tutti i partecipanti. Dopo aver specificato in che modo la letteratura esistente affronta questa problematica, ed evidenziato in modo particolare, all'interno di questa, l'articolo di Carey (1993), si stabilisce una impostazione alternativa basata sul concetto di "mossa della natura", tipico della teoria dei giochi bayesiani. Infine, viene sottolineata la differenza tra la strategia di offerta ottima che chiude questo lavoro con quella della già citata autrice, dopo che i dati sono stati resi omogenei per opportune ragioni di confronto [Cod. JEL D44, C70].

1. - Introduzione

Per quasi venti anni, a partire dal lavoro pionieristico di Vickrey (1961), il contributo della teoria economica in materia di aste è stato alquanto limitato. In generale, le principali aree di ricerca si muovevano lungo due percorsi paralleli e allo stesso tempo fortemente intrecciati: da un lato si indirizzavano alla classifica-

* L'autore, <gianniwalter@yahoo.it>, ringrazia particolarmente il Prof. Massimo Marrelli per il fondamentale ruolo svolto nella sua vita, nella sua educazione e soprattutto per l'aiuto e il sostegno come relatore della sua tesi di laurea. Ringrazia anche il suo collega Francesco Flaviano Russo per gli utili commenti e la *Rivista di Politica Economica* e Confindustria per l'opportunità offertagli con il premio Angelo Costa. La versione finale di questo articolo ha tratto un grande beneficio dai preziosi commenti di alcuni anonimi *referee* italiani ed internazionali.

zione delle principali forme d'asta e alla loro equivalenza, sotto certe condizioni, e dall'altro l'attenzione si concentrava sul meccanismo di offerta ottima volto a massimizzare il profitto atteso del partecipante all'asta.

Solo verso l'inizio degli anni '80, hanno cominciato a farsi strada nella letteratura economica alcuni modelli in grado di descrivere in maniera abbastanza generale i principali elementi che contraddistinguono un'asta e in modo particolare, sia la regola di aggiudicazione, la regola di pagamento, che le ipotesi di valutazione economica dell'oggetto e tali da ricomprendere, al loro interno, i principali casi di studio di aste a valor comune, aste a valutazioni indipendenti ed aste a valutazioni correlate. L'attenzione, inoltre, si è gradualmente spostata dall'offerta ottima all'asta ottima, ovvero si è data molta importanza all'analisi normativa e alle regole del gioco, privilegiando il ruolo cruciale dell'organizzatore d'asta¹.

Proprio in quest'ultima ottica, molta letteratura si è concentrata sugli strumenti, molto spesso assai semplici, di cui può servirsi il regolatore d'asta per migliorare il risultato che si aspetta di ottenere dalla procedura di vendita. In modo particolare, lo strumento più semplice in assoluto, e di gran lunga il più trattato dalla teoria è rappresentato dal prezzo di riserva, ovvero quella soglia al di sotto della quale l'organizzatore d'asta non è più disposto ad accettare offerte². In altre parole, tenuto conto del comportamento di offerta ottima dei partecipanti, il banditore fissava quel valore b_+ tale da massimizzare il suo ricavo atteso, sopportando ovviamente il rischio che l'asta stessa potesse andare deserta, qualora nessuno presentasse offerte legittime³.

Quello che caratterizzava, ad ogni modo, tutti questi modelli, era il fatto che l'analisi della strategia ottima dei partecipanti

¹ v. RILEY J.G. - SAMUELSON W. (1981) e MYERSON R.B. (1981). Inoltre, MILGROM P.R. - WEBER R.J. (1982) hanno per primi introdotto il cosiddetto modello generale d'asta, le cui assunzioni erano così generali da poter ricomprendere le principali tipologie d'asta.

² Ovviamente, in maniera assolutamente simmetrica, nelle aste ad acquisto si tratterebbe di una soglia massima di accettazione, cioè di un tetto alle offerte ammissibili.

³ v. in modo particolare McAFFEE R.P. - McMILLAN J. (1987), anche per quanto riguarda la strategia di offerta ottima.

non veniva approfondita in maniera adeguata, e questo soprattutto per l'accentuato interesse normativo che portava a concentrare l'attenzione sulla questione dell'ottimalità della base d'asta, una volta risolta in modo più o meno sommario la strategia di reazione dei partecipanti; solitamente infatti, rispetto ad un qualsiasi modello generale senza prezzo di riserva, si assumeva ora che l'unica differenza rilevante fosse il più ristretto spazio delle offerte ammissibili, mentre continuavano a valere tutte le altre ipotesi⁴.

In maniera più specifica, comunque, non si può non evidenziare questa esemplificazione così evidente, laddove non si tiene conto che, introducendo per esempio una qualsiasi soglia minima nota a tutti i partecipanti, non è detto che tutti i concorrenti siano ancora in grado di competere per l'assegnazione del bene o del servizio, in quanto alcuni potrebbero trovarsi evidentemente in perdita, qualora costretti a presentare offerte giudicate ammissibili, preferendo in questo caso abbandonare l'asta. Il numero effettivo dei partecipanti allora, non solo non è più noto, divenendo una variabile dipendente dal prezzo di riserva stesso, ma addirittura, come ipotesi estrema, sarebbe possibile che non ci fosse più alcuna aggiudicazione.

In letteratura esistono diversi lavori che affrontano la problematica connessa al numero effettivo di partecipanti dopo l'introduzione di un prezzo di riserva, e soprattutto dei suoi effetti sulla funzione di reazione degli offerenti stessi. In modo particolare, Carey (1993)⁵ tiene conto di questa circostanza nel modellizzare la convenienza per il banditore, in termini di ricavi attesi, ad introdurre un prezzo di riserva noto a tutti, o ad annunciarne solo l'esistenza ma non il valore. In altre parole, al di là del confronto tra le due alternative a disposizione del compratore monopsonista, le strategie di equilibrio cominciano a tener conto del fatto che il fattore di concorrenza, rappresentato dalla numerosità

⁴ In modo particolare, erano inalterate le ipotesi sulla numerosità dei partecipanti, sulla conoscenza comune e sulla distribuzione di probabilità dei tipi, previo un necessario "aggiustamento" della probabilità cumulata, condizionato al più ristretto spazio dei tipi.

⁵ BULOW J. - KLEMPERER P. (1995) presentano risultati connessi a quelli contenuti nel lavoro di CAREY K. (1993).

dei partecipanti, non è più esogeno, ma esso stesso direttamente dipendente dall'altezza di b_+ .

Questo articolo intende presentare un approccio alternativo in tema di equilibri simmetrici e strategie ottime in aste ad acquisto, quando il banditore annuncia la soglia massima di accettazione. Si propone infatti, una modellizzazione che tenta di riportare la problematica appena discussa nell'alveo naturale della teoria dei giochi, e, a tal proposito, si discosta in maniera significativa dalle impostazioni della già citata autrice. Il principale elemento messo in discussione è rappresentato proprio dall'informazione sulla numerosità dei concorrenti e, conseguentemente, da come questa viene percepita dai partecipanti e quindi incorporata nella funzione di offerta ottima.

Il numero effettivo dei concorrenti, infatti, è strettamente dipendente dalla condotta del banditore rappresentata dall'altezza del prezzo di riserva, ed è noto solo *ex-post*. *Ex-ante* invece, non è un valore certo, ma distribuito secondo una variabile casuale binomiale dipendente proprio dal prezzo di riserva e dalla numerosità iniziale: l'attenzione, in questo contesto informativo, si concentra su come viene influenzato l'effettivo svolgimento del gioco d'asta.

Piuttosto che rappresentare il fattore di concorrenza esclusivamente come il numero medio di partecipanti, viene introdotto il concetto tipico dei giochi bayesiani di "mossa della natura". Quest'ultima sceglie il ramo dell'albero, rappresentato dal numero di partecipanti effettivi, cioè il percorso su cui si svolge effettivamente la competizione, soltanto che questa mossa, come ogni scenario bayesiano, non è osservabile dagli offerenti; il che si traduce in una informazione che non è nota e la cui mancanza viene sopperita, in maniera parziale, dall'esistenza di una distribuzione di probabilità sul comportamento della natura stessa.

Nel modellizzare il comportamento ottimo degli offerenti, viene presentata appunto la condizione del primo ordine, cioè la condizione necessaria per l'ottimalità che porta a definire l'equilibrio di Bayes-Nash di questo gioco d'asta e che alla fine si concretizza proprio nella strategia di offerta ottima.

Chiude il tutto un commento basato sul confronto dei risultati ottenuti in questa sede con quelli già citati. Anticipo che le

simulazioni effettuate, che per ragioni ovvie sono state condotte con dati e contesti assolutamente omogenei rispetto a quelli del termine di confronto, portano a ritenere che la strategia ottima ottenuta in Carey (1993), sia sovrastimata rispetto a quella che conclude questo lavoro.

2. - Il modello

Consideriamo un modello generale d'asta FPSB a valori privati indipendenti. Il banditore è un acquirente monopsonista ed aggiudica il contratto per il servizio o per l'oggetto X a chi presenta l'offerta più bassa. Sia inoltre N il numero iniziale dei partecipanti, noto a tutti. Ogni partecipante i conosce il proprio costo C_i con certezza, ma non quello degli altri. Il generico offerente, comunque, percepisce che i costi degli altri concorrenti sono presi da una distribuzione di probabilità $F(x)$, identica e nota a tutti, e tale che $F(x) : [\underline{c}, \bar{c}] \rightarrow [0, 1] \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Il *payoff*, infine, è $b_i - C_i$, dove b_i è la sua offerta, mentre C_i è il suo costo.

Ogni partecipante è quindi neutrale rispetto al rischio e massimizza il proprio profitto atteso, e si aspetta che anche gli altri offerenti si comportino in maniera razionale.

Come ampiamente noto alla letteratura, l'equilibrio (di Bayes-Nash) simmetrico⁶ è:

$$(1) \quad b_i^* = C_i + \frac{\int_{C_i}^{\bar{c}} [1 - F(s)]^{N-1} ds}{[1 - F(C_i)]^{N-1}}$$

Qualora il banditore annunciasse un prezzo di riserva \bar{a} (praticamente un tetto alle offerte ammissibili), noto a tutti, molti modelli, anche per buona parte degli anni '90, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, non hanno adeguatamente studiato tut-

⁶ Per la prova v. l'Appendice.

te le possibili implicazioni e le notevoli conseguenze sull'offerta ottima che questo strumento normativo comporta; semplicemente, hanno continuato a considerare la numerosità totale dei partecipanti N come una variabile esogena e quindi immutata. Questo perché si era interessati più all'asta ottima e al prezzo di riserva ottimo che potesse massimizzare il profitto dell'organizzatore d'asta (rispettivamente minimizzarne la spesa), piuttosto che approfondire *in toto* il meccanismo di offerta ottima e soprattutto riscriverne le peculiarità, tenendo conto ora della mutata natura della variabile N che diventava strettamente dipendente dall'altezza di \bar{a} e dalla distribuzione dei tipi $F(x)$.

Tradizionalmente, infatti, l'offerta ottima si discostava di poco da quella vista sopra, proprio per il diverso estremo superiore che da \bar{c} si riduceva ad \bar{a} , e per l'"aggiustamento" della funzione di probabilità cumulata⁷.

$$(2) \quad b_i^* = C_i + \frac{\int_{C_i}^{\bar{a}} \left[1 - \frac{F(s)}{F(\bar{a})} \right]^{N-1} ds}{\left[1 - \frac{F(C_i)}{F(\bar{a})} \right]^{N-1}}$$

In altre parole, si dava per scontato che dopo l'introduzione di una soglia massima alle offerte, tutti gli N offerenti avessero superato il "taglio", cioè fossero in grado di presentare offerte. Visto in termini economici, questo significava che, nonostante un tetto alle offerte ammissibili, ogni partecipante aveva un costo inferiore. Questa informazione implicita, di conoscenza comune, modifica leggermente la distribuzione di probabilità cumulata, e l'intervallo dei valori, che sarà $[c, \bar{a}]$.

La discussione seguente invece, vuole descrivere il meccanismo di offerta ottimo (e quindi l'equilibrio di Bayes-Nash sim-

⁷ Si può facilmente osservare la stretta somiglianza della formula (2) con la precedente. La differenza rilevante, come si evince dal testo, è proprio la funzione di probabilità cumulata che è ora condizionata.

metrico) dopo che, in un modello generale d'asta, il banditore ha annunciato un tetto \bar{a} alle offerte ammissibili, noto a tutti. Ovviamente, tenuto conto di quanto appena detto nel paragrafo precedente, il numero finale dei partecipanti non sarà più considerato una variabile certa, bensì aleatoria; inoltre, si terrà conto della “mossa della natura” e del contesto bayesiano, cioè dell'effettivo numero di concorrenti in competizione su ogni ramo dell'albero del gioco d'asta.

Manteniamo allora inalterate le ipotesi generali esposte all'inizio del paragrafo⁸. Supponiamo ora che \bar{a} sia il valore massimo al di sopra del quale non vengono accettate offerte. Ovviamente $\bar{a} \in [\underline{c}, \bar{c}]$, altrimenti, economicamente, non avrebbe alcun senso introdurre un prezzo di riserva. Non è detto che tutti i partecipanti iniziali possano ancora presentare offerte. Infatti, tutti quelli il cui $C_i > \bar{a}$, qualora dovessero concorrere alla competizione, incorrerebbero in un *payoff* negativo; solo i $C_i \leq \bar{a} \forall_i$, possono allora partecipare all'asta.

Il numero dei venditori effettivi in questo caso è una variabile casuale R che assume valori interi tra 0 e N e si distribuisce secondo una probabilità binomiale con parametri \bar{a} e N . Poiché R è sconosciuto ai partecipanti, questi potrebbero formulare le loro strategie di equilibrio basandosi sul valore o numero atteso finale di partecipanti, $\bar{a}N$ ⁹. In questo saggio, invece, si presenta un modello che si rifà direttamente ai giochi non-cooperativi bayesiani in cui è la “mossa della natura” che sceglie i tipi, e quindi il numero di quelli che potranno partecipare.

Dal punto di vista del partecipante i , questi sa se il suo costo è minore o meno del tetto \bar{a} . Assumiamo che lo sia. Il numero atteso dei partecipanti residuali segue la medesima distribuzione binomiale però con parametri \bar{a} e $N-1$. La distribuzione di probabilità della v.c. R ¹⁰ è data da:

⁸ Questo anche per l'immediato confronto tra le due diverse specificazioni funzionali: quella di Carey e la (6) che emerge alla fine del paragrafo.

⁹ Questa è esattamente l'idea base su cui viene modellizzato l'equilibrio di CAREY K. (1993).

¹⁰ Per il prosieguo della trattazione con R sarà indicato, per semplicità, il numero atteso dei partecipanti residuali.

$$\binom{N-1}{R} F(\bar{a})^R [1 - F(\bar{a})]^{N-1-R}$$

dove $F(\bar{a})$ è la probabilità che in tipo C_j sia compreso nell'intervallo $[\underline{c}, \bar{a}]$ e quindi possa fare offerte.

Per ogni valore che R può assumere, non solo abbiamo una certa probabilità che questo si verifichi, ma anche un gioco d'asta *standard* con numero di partecipanti ben definito a cui corrisponde la probabilità che la mossa della natura lo "estragga". L'informazione incompleta sulla numerosità è diventata incompleta sul tipo di gioco (o di ramo dell'albero, il che è la stessa cosa), e l'incertezza sul numero effettivo R è diventata probabilità sul tipo di ramo.

Il *payoff*, per il giocatore i , che possiamo ottenere allora è: $(b_i - C_i)$ se sono da solo (il che si verifica con probabilità $[1 - F(\bar{a})]^{N-1}$); $(b_i - C_i) [\text{Prob}(b_i < b_j)]$ — se i concorrenti sono i e j — la probabilità è $(N - 1) F(\bar{a}) [1 - F(\bar{a})]^{N-2}$.

Naturalmente, in questa sequenza di *payoff* attesi, ci fermiamo quando R assume il valore $N-1$ ottenendo un *payoff* $(b_i - C_i) [\text{Prob}(b_i < b_j \forall i \neq j)]$ — partecipiamo in N - e la probabilità è $F(\bar{a})^{N-1}$.

In realtà, ogni singolo *payoff* visto prima corrisponde a quello atteso di un gioco d'asta tradizionale, equivalente al nostro, in cui però, il numero dei partecipanti è certo e corrisponde ad ognuna delle possibili realizzazioni della variabile casuale R ; abbiamo tanti giochi quanti sono i possibili partecipanti, cioè da 1 fino ad N .

Ricordando che è la natura a scegliere il tipo di "gioco" o di "ramo" con una certa probabilità, come abbiamo appena detto, dobbiamo massimizzare il seguente profitto atteso.

$$(b_i - C_i) \left\{ [1 - F(\bar{a})]^{N-1} + \text{Prob}(b_i < b_j) (N - 1) F(\bar{a}) [1 - F(\bar{a})]^{N-2} + \dots + \text{Prob}(b_i < b_j \forall \neq j) F(\bar{a})^{N-1} \right\}$$

Si dimostra facilmente che l'offerta b_i generata dalla massimizzazione precedente, è una funzione $b^*(.)$ strettamente crescente nei

tipi, il che genera un equilibrio simmetrico¹¹. Questo significa ancora¹², che data la relazione $b(C_i) \neq b(C_j) \Leftrightarrow C_j \neq C_i$, abbiamo l'inversa della funzione di offerta, cioè $C_i = b^{-1}(b_i)$.

Il profitto $\Pi(b_i, C_i)$ diventa allora:

$$(b_i - C_i) \left\{ \begin{aligned} & \left[1 - F(\bar{a}) \right]^{N-1} + \left[1 - \frac{F(b^{*-1}(b_i))}{F(\bar{a})} \right] (N-1) F(\bar{a}) [1 - F(\bar{a})]^{N-2} + \\ & \dots + F(\bar{a})^{N-1} \left[1 - \frac{F(b^{*-1}(b_i))}{F(\bar{a})} \right]^{N-1} \end{aligned} \right\}$$

dove $b^{*-1}(b_i)$ è la funzione inversa di $b^*(\cdot)$, la cui esistenza è assicurata dall'appartenenza alla classe E di Riley-Samuelson.

Riscrivendo in termini più generali la formula precedente, otterremo che:

$$(3) \quad \Pi(\cdot, \cdot) = (b_i - C_i) \left[\sum_{R=0}^{N-1} \binom{N-1}{R} F(\bar{a})^R [1 - F(\bar{a})]^{N-1-R} \left[1 - \frac{F(b^{*-1}(b_i))}{F(\bar{a})} \right]^R \right]$$

Date le assunzioni del modello IPV, per ottenere la strategia di offerta ottima che caratterizza l'equilibrio di Bayes-Nash di questo gioco, scriviamo la condizione del primo ordine e cioè:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{R=0}^{N-1} \binom{N-1}{R} F(\bar{a})^R [1 - F(\bar{a})]^{N-1-R} \left[1 - \frac{F(b^{*-1}(b_i))}{F(\bar{a})} \right]^R \right] + \\ & + (b_i - C_i) \sum_{R=0}^{N-1} \binom{N-1}{R} F(\bar{a})^R [1 - F(\bar{a})]^{N-1-R} R \left[1 - \frac{F(b^{*-1}(b_i))}{F(\bar{a})} \right]^{R-1} * \\ & * \left(\frac{-f(b^{*-1}(b_i))}{F(\bar{a})} \right) \left(\frac{1}{db^* / dC_i} \right) = 0 \end{aligned}$$

¹¹ v. un buon manuale di teoria dei giochi per la dimostrazione completa. Magari FUDENBERG D. - TIROLE J. (1991).

¹² v. *Appendice*.

Ricordando che in equilibrio si ha che $b^{*-1}(b_i) = C_i$, possiamo riscrivere la formula precedente:

$$\frac{db^*}{dC_i} \left[\sum_{R=0}^{N-1} \binom{N-1}{R} F(\bar{a})^R [1-F(\bar{a})]^{N-1-R} \left[1 - \frac{F(C_i)}{F(\bar{a})} \right]^R \right] +$$

$$+(b_i - C_i) \left[\sum_{R=0}^{N-1} \binom{N-1}{R} F(\bar{a})^R [1-F(\bar{a})]^{N-1-R} R \left[1 - \frac{F(C_i)}{F(\bar{a})} \right]^{R-1} \left(\frac{-f(C_i)}{F(\bar{a})} \right) \right] = 0$$

L'equazione differenziale è la prima condizione necessaria di ottimo. La condizione iniziale è che l'offerente marginale deve essere indifferente tra il vincere e il non vincere l'asta¹³. Ne consegue che $b^*(\bar{a}) = \bar{a}$. Inoltre, deve essere verificata per tutti i valori ammissibili dei costi individuali $C_j \in [\underline{c}, \bar{c}]$.

Integrando ed applicando appunto la condizione iniziale, si ottiene che:

$$(4) \quad b_i^* = C_i + \frac{\int_{C_i}^{\bar{a}} \left[\sum_{R=0}^{N-1} \binom{N-1}{R} F(\bar{a})^R [1-F(\bar{a})]^{N-1-R} \left[1 - \frac{F(s)}{F(\bar{a})} \right]^R \right] ds}{\sum_{R=0}^{N-1} \binom{N-1}{R} F(\bar{a})^R [1-F(\bar{a})]^{N-1-R} R \left[1 - \frac{F(C_i)}{F(\bar{a})} \right]^R}$$

dove s è la variabile di integrazione.

Per semplificare ed agevolare l'interpretazione delle differenze tra le due diverse impostazioni metodologiche, si considera una distribuzione di probabilità uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 1]$. Con questa specificazione, evidenziamo prima l'offerta ottima così come risulta dal lavoro della già citata autrice, e poi quella risultante da questo saggio, ovviamente normalizzata per ragioni di confronto.

¹³ Ancora una volta il partecipante marginale è quello con il peggior segnale di costo, che in questo caso però, è quello il cui costo corrisponde al tetto massimo delle offerte ammissibili.

Nel primo caso riportiamo:

$$(5) \quad b_i^* = C_i + \frac{1}{N} - \frac{C_i}{N\bar{a}}$$

Riscrivendo invece in termini specifici la formula (4)¹⁴, si ottiene:

$$(6) \quad b_i^* = C_i + \frac{\sum_{R=0}^{N-1} \left[\frac{\binom{N-1}{R} \bar{a}^R [1-\bar{a}]^{N-1-R} \left[\bar{a} \left[1 - \frac{C_i}{\bar{a}} \right]^{R+1} \right]}{R+1} \right]}{\sum_{R=0}^{N-1} \left[\binom{N-1}{R} \bar{a}^R [1-\bar{a}]^{N-1-R} R \left[1 - \frac{C_i}{\bar{a}} \right]^R \right]}$$

Il paragrafo che segue invece, parte dal risultato appena ottenuto confrontandolo con l'equivalente formula di Carey (1993) al fine di determinare regolarità nelle differenze.

3. - Conclusioni

Come accennato nell'introduzione, dopo aver proposto una diversa specificazione funzionale della strategia di offerta ottima, il lavoro sottolinea l'importanza di confrontare questo risultato con quello del già citato articolo. Dopo aver simulato il diverso andamento delle due funzioni di offerta, normalizzate per ragioni di convenienza, e per valori di $N \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50\}$ e per valori di $\bar{a} \in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0\}$, si sono riscontrate importanti regolarità nelle loro differenze.

Per facilitare, inoltre, l'intuizione di queste differenze è neces-

¹⁴ Dal momento che abbiamo considerato una funzione di probabilità uniformemente distribuita e normalizzata sull'intervallo $[\underline{c}, \bar{c}] = [0, 1]$, il tetto alle offerte ammissibili \bar{a} sarà anche questo compreso tra 0 ed 1. Inoltre, si vede facilmente che ogni $F(\bar{a})$ corrisponde esattamente ad \bar{a} .

saria una breve analisi delle caratteristiche principali e del comportamento delle due funzioni di offerta, vedi la (5) e la (6), che concludono i rispettivi lavori. Si può immediatamente notare che la prima formula, così come derivante dall'articolo citato, è una funzione strettamente crescente nei tipi, e caratterizzata soprattutto dal fatto che l'offerta del partecipante marginale è esattamente identica al proprio costo \bar{a} , così come accade nella seconda formula; quello che però la contraddistingue, e allo stesso tempo la differenzia, è il suo andamento lineare nei costi, cioè il fatto di essere una retta. Al contrario, invece, la formula (6) che conclude questo saggio, riscritta come semplificazione della (4), è comunque una funzione strettamente crescente, ma viceversa convessa nei costi.

Proprio sulla base di queste considerazioni è stato possibile effettuare significative simulazioni sull'andamento delle due offerte ottime. Il risultato evidenzia come i partecipanti debbano sottostimare le proprie offerte rispetto all'impostazione presentata da Carey; debbano cioè, essere più prudenti quando concorrono in competizione con gli altri e fare offerte che si discostano di meno dal proprio costo rispetto a quanto è stato già proposto.

In altre parole, per corrispondenti valori della numerosità dei partecipanti e del prezzo di riserva, il comportamento ottimo ottenuto in Carey (1993) sovrastima l'offerta effettiva. Ad essere più precisi, però, un'eccezione si verifica nel caso di $N=2$, in quanto per qualsiasi valore di \bar{a} , a partire da $\bar{a} = 0,6$, esiste sempre un valore critico C_i ammissibile (cioè compreso tra gli estremi dei tipi), prima del quale la strategia ottima risultante da questo lavoro dà origine ad una funzione di offerta superiore al termine di confronto; viceversa accade nell'intervallo superiore. Anche per altri valori di N esiste questo punto, solo che può tranquillamente definirsi trascurabile ed insignificante dal punto di vista economico, perché, anche qualora dovesse risultare nella sua esistenza, già da $N=3$ assume mediamente valori molto piccoli, nell'ordine di 10^{-3} o ancora più bassi.

Questo porta a concludere che esiste un unico intervallo dei tipi, che è poi quello che va da $[\underline{c}, \bar{a}]$, ossia quello originario corretto con il prezzo di riserva, tale che la differenza tra le due diverse impostazioni, e quindi nei risultati, continua ad essere quella individuata: in Carey (1993) l'offerta viene sovrastimata.

APPENDICE

Prova della formula (1): in questo paragrafo, per questioni di semplicità e per non appesantire la lettura, partiamo direttamente dalla considerazione che la strategia di offerta ottima è una funzione strettamente crescente nei tipi C_i (del resto, basta un buon manuale di teoria dei giochi per provare questa semplice assunzione¹⁵).

Data una certa strategia $b_i(C_i)$, quindi, abbiamo automaticamente definito anche la funzione inversa $\Rightarrow C_i = b^{-1}(b_i)$.

Il problema del generico partecipante all'asta diventa quindi:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{b_i} E [\pi (b_i, C_i)] &= (b_i - C_i) [\text{Prob} (\forall j \neq i, b^{-1}(b_j) < C_i)] = \\ &= (b_i - C_i) [1 - F(b^{-1}(b_i))]^{N-1} \end{aligned}$$

Data la condizione del primo ordine si ottiene:

$$\begin{aligned} &[1 - F(b^{-1}(b_i))]^{N-1} + \\ &+(b_i - C_i) \left[(N-1) [1 - F(b^{-1}(b_i))]^{N-2} \left[-f(b^{-1}(b_i)) \right] \frac{1}{b_i'(b^{-1}(b_i))} \right] = 0 \end{aligned}$$

In equilibrio $b^{*-1}(b_i) = C_i$, da cui:

$$\frac{\partial b^*}{\partial C_i} [1 - F(C_i)]^{N-1} - (b_i^* - C_i)(N-1) [1 - F(C_i)]^{N-2} f(C_i) = 0$$

Questa equazione differenziale deve essere verificata per tutti i $C_i \in [\underline{c}, \bar{c}]$ e la condizione iniziale riguarda il comportamen-

¹⁵ V. FUDENBERG D. - TIROLE J. (1991).

to del concorrente marginale, cioè quello con il peggior segnale di costo, che in equilibrio deve avere un profitto nullo dall'asta, quindi $b^*(\bar{c}) = \bar{c}$

$$\int_{C_i}^{\bar{c}} \frac{\partial b^*}{\partial C} [1 - F(C)]^{N-1} dC + \int_{C_i}^{\bar{c}} (b^*(C) - C)(N-1)[1 - F(C)]^{N-2} (-f(C)) dC = 0$$

Con semplici passaggi algebrici, l'equazione precedente si trasforma in:

$$\int_{C_i}^{\bar{c}} \frac{\partial b^*}{\partial C} [1 - F(C)]^{N-1} dC + \int_{C_i}^{\bar{c}} -[1 - F(C)]^{N-1} \left(\frac{\partial b^*}{\partial C} - 1 \right) dC +$$

$$+ \left[[1 - F(C)]^{N-1} (b^*(C) - C) \right]_{C_i}^{\bar{c}} = 0$$

da cui, risolvendo per $b^*(C_i)$ si ottiene:

$$b^*(C_i) = C_i + \frac{\int_{C_i}^{\bar{c}} [1 - F(s)]^{N-1} ds}{[1 - F(C_i)]^{N-1}}$$

dove s è appunto la variabile di integrazione.

Ecco completata la dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA

- BULOW J. - KLEMPERER P., «Auctions vs. Negotiations», *American Economic Review*, vol. 86, 1995, pp. 180-94.
- CAREY K., «Reservation Price Announcement in Sealed Bid Auctions», *The Journal of Industrial Economics*, vol. XLI, n. 4, 1993, pp. 421- 9.
- FUDENBERG D. - TIROLE J., *Game Theory*, Cambridge (Mass), MIT Press.
- MCAFEE R.P. - McMILLAN J., «Auctions and Bidding», *Journal of Economic Literature*, n. 25, 1987, pp. 699-738.
- MILGROM P.R. - WEBER R.J., «A Theory of Auctions and Competitive Bidding», *Econometrica*, n. 50, 1982, pp. 1089-1122.
- MYERSON R.B., «Optimal Auction Design», *Mathematics of Operation Research*, n. 6, 1981, pp. 58-73.
- RILEY J.G. - SAMUELSON W., «Optimal Auctions», *American Economic Review*, vol. 71, n. 3, 1981, pp. 381-92.
- VICKREY W., «Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders», *Journal of Finance*, n. 16, 1961, pp. 8-37.

